Mines 1 M.P. 2025

Corrigé écrit par F. Denizet (M.P. Fénelon)

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$.
   Si $x = 0$ ou $y = 0$ l'inégalité voulue est immédiate.
   Si $x > 0$ et $y > 0$, puisque $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ on peut utiliser la concavité de la fonction ln, assurée par le fait que $\ln'' : t \mapsto -\dfrac{1}{t^2}$ est négative.
   On a donc : $\ln\left(\dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q\right) \geq \dfrac{1}{p}\ln(x^p) + \dfrac{1}{q}\ln(y^q) = \ln(xy)$.
   Par croissance de la fonction ln on en déduit que : $\boxed{\dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q \geq xy}$.

2. • Premier cas : si X ou Y est nulle, l'inégalité est immédiate car $E(XY) = 0$ et X et Y sont positives.
   • Second cas : si X et Y sont non nulles, on a donc $E(X^p) > 0$ et $E(Y^q) > 0$ ($\|.\|_p$ est une norme).
   Supposons que $E(X^p) = E(Y^q) = 1$, puisque X et Y sont positives, la question 1 assure que $XY \leq \dfrac{X^p}{p} + \dfrac{Y^q}{q}$, par croissance et linéarité de l'espérance on a donc
   $E(XY) \leq \dfrac{E(X^p)}{p} + \dfrac{E(Y^q)}{q} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   Revenons au cas général et posons $U = \dfrac{X}{(E(X^p))^{1/p}}$ et $V = \dfrac{Y}{(E(Y^q))^{1/q}}$.
   On a $E(U^p) = E(V^q) = 1$ avec U et V positives, on en déduit donc $E(UV) \leq 1$, par linéarité de l'espérance cela donne $\boxed{E(XY) \leq (E(X^p))^{1/p}(E(Y^q))^{1/q}}$.

3. Dans le cas $p = q = 2$ on retrouve $\boxed{\text{l'inégalité de Cauchy-Schwarz}}$: $E(XY) \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$.
   On peut justifier cette inégalité directement par le fait que $\varphi : (X,Y) \mapsto E(XY)$ est un produit scalaire sur $L^0(\Omega)$ ce qui est l'objet de la question 17.

4. Remarquons d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) \leq \prod_{j=1}^{2n} j = (2n)!$.

   Soit $t \in \mathbb{R}$, par développement en série entière : $\operatorname{ch}(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$.

   Où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t^{2n} \geq 0$ donc $\dfrac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \dfrac{t^{2n}}{2^n n!}$.

   Par sommation on a donc : $\boxed{\operatorname{ch}(t) \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^n}{n!} = \mathrm{e}^{t^2/2}}$.

5. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et soit $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.
   L'espérance d'un produit de variables indépendantes est égale au produit des espérances de ces variables donc :
   $E\left(\exp\left(t\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(tc_i X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} E(\exp(tc_i X_i))$.

Or par théorème de transfert, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:
$E(\exp(tc_iX_i)) = \dfrac{1}{2}\exp(-tc_i) + \dfrac{1}{2}\exp(tc_i) = \text{ch}(tc_i) \leq \mathrm{e}^{(tc_i)^2/2}$.
Tous les termes du produit étant positifs on a donc :
$$\boxed{E\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right)\right) \leq \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{(tc_i)^2/2} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)}.$$

6. *Remarque : l'énoncé est ici un peu déroutant puisque le x du 6 joue le rôle du t du 5, il aurait été plus cohérent d'écrire le 5 avec x au lieu de t.*
   Soit $(t, x) \in \mathbb{R}_+^2$ et soit $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.
   La variable $\exp\left(x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right)$ est positive on peut lui appliquer l'inégalité de Markov ce qui donne $P\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) > \mathrm{e}^{tx}\right) \leq \dfrac{E\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right)\right)}{\mathrm{e}^{tx}}$.
   En utilisant alors le 5 avec x au lieu de t on a $P\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) > \mathrm{e}^{tx}\right) \leq \mathrm{e}^{-tx}\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)$.
   On peut alors appliquer cette inégalité avec $(-c_1, \ldots, -c_n)$ au lieu de $(c_1, \ldots, c_n)$ ce qui donne : $P\left(\exp\left(-x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) > \mathrm{e}^{tx}\right) \leq \mathrm{e}^{-tx}\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)$.
   Or $\left[\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right|\right) > \mathrm{e}^{tx}\right] = \left[\exp\left(x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) > \mathrm{e}^{tx}\right] \cup \left[\exp\left(-x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) > \mathrm{e}^{tx}\right]$.
   On a donc $\boxed{P\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right|\right) > \mathrm{e}^{tx}\right) \leq 2\mathrm{e}^{-tx}\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)}$.
7. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et soit $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul.
   Si t est nul, l'inégalité est triviale (une probabilité est toujours plus petite que 2).
   Supposons $t > 0$ et posons $\boxed{x = \dfrac{t}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}}$ on a $x > 0$.
   Par croissance stricte de exp et puisque $x > 0$ on a :
   $\left[\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right|\right) > \mathrm{e}^{tx}\right] = \left[x\left|\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right| > tx\right] = \left[\left|\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right| > t\right]$.
   En appliquant 6 on obtient donc $P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right| > t\right) \leq 2\mathrm{e}^{-tx}\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)$.
   Or $\mathrm{e}^{-tx}\exp\left(\dfrac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right) = \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2 - tx\right) = \exp\left(-\dfrac{t^2}{2\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right)$.
   On a donc bien $\boxed{P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right| > t\right) \leq 2\exp\left(-\dfrac{t^2}{2\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right)}$.
8. X étant positive et finie on peut poser $x_1, \ldots, x_r$ tel que $0 \leq x_1 < \cdots < x_r$ et $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_r\}$.

On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $F_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, x_1[\\ \displaystyle\sum_{j=i+1}^{r} P(X = x_j) & \text{si } t \in [x_i, x_{i+1}[\text{ où } i \in [\![1, r-1]\!] \\ 0 & \text{si } t \geq x_r \end{cases}$

La fonction F_X est une fonction en escalier sur $\mathbb{R}_+$ nulle sur $[x_r, +\infty[$ ce qui assure la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_X(t)\mathrm{d}t$ (on a $p-1 \geq 0$ donc il n'y a pas de problème de convergence en 0), de plus par relation de Chasles on a :

$$\begin{aligned}
&p\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_X(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{x_1} pt^{p-1}\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{r-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} pt^{p-1}\sum_{j=i+1}^{r} P(X = x_j)\mathrm{d}t \\
&= x_1^p + \sum_{i=1}^{r-1}\left((x_{i+1}^p - x_i^p)\sum_{j=i+1}^{r} P(X = x_j)\right) \\
&= x_1^p + \sum_{j=2}^{r}\left(P(X = x_j)\sum_{i=1}^{j-1}(x_{i+1}^p - x_i^p)\right) \\
&= x_1^p + \sum_{j=2}^{r}\Big(P(X = x_j)(x_j^p - x_1^p)\Big) \\
&= \left(1 - \sum_{j=2}^{r} P(X = x_j)\right)x_1^p + \sum_{j=2}^{r} P(X = x_j)x_j^p \\
&= \sum_{j=1}^{r} P(X = x_j)x_j^p \\
&\boxed{= E(X^p)}.
\end{aligned}$$

9. La fonction $t \mapsto t^3\mathrm{e}^{-t^2/2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ de plus par croissances comparées $t^3\mathrm{e}^{-t^2/2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ converge.

   Posons $U = \left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right|$, U est réelle positive finie, on a alors d'après la question 8 :

   $$E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right)^4\right) = E(U^4) = 4\int_0^{+\infty} t^3F_U(t)\mathrm{d}t.$$

   Puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$, la question 7 donne : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $F_U(t) = P\left(\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right| > t\right) \leq 2\mathrm{e}^{-t^2/2}$.

   On a donc $\boxed{E\left(\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right)^4\right) \leq 8\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t}$.

10. On remarque que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i^2 = 1$ et $E(X_i) = 0$.

    Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, si $i = j$, $E(X_iX_j) = E(1) = 1$ et si $i \neq j$ par indépendance $E(X_iX_j) = E(X_i)E(X_j) = 0$, on a donc :

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^n c_iX_i\right)^2\right)=E\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_ic_jX_iX_j\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_ic_jE(X_iX_j)\boxed{=\sum_{i=1}^n c_i^2}.$$

11. *Remarque : l'énoncé n'est pas clair ici quand au statut de β_p qui peut bien sûr dépendre de p mais ne doit pas dépendre de n. Or cette indépendance à n n'est pas évoquée et pose problème puisque le n semble être fixé par l'énoncé initialement. Il aurait fallu clairement écrire que β_p devait être indépendant de n.*

   • Supposons que $\sum_{i=1}^n c_i^2=1$, et posons $U=\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|$, de même qu'à la question 9 on a :

   $$E\left(\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|^p\right)=E(U^p)=p\int_0^{+\infty}t^{p-1}F_U(t)\mathrm{d}t\ \le 2p\int_0^{+\infty}t^{p-1}\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

   On pose $\boxed{\beta_p=\left(2p\int_0^{+\infty}t^{p-1}\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t\right)^{1/p}}$, on a $E\left(\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|^p\right)^{1/p}\le\beta_p$.

   On a bien $\beta_p>0$ car la fonction $t\mapsto t^{p-1}\mathrm{e}^{-t^2/2}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

   • Revenons au général, si tous les c_i sont nuls, l'inégalité voulue s'écrit $0\le 0$ sinon on pose $K=\left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right)^{1/2}$, on a $K>0$ et la question 10 assure que $K=E\left(\left(\sum_{i=1}^n c_iX_i\right)^2\right)^{1/2}$.

   On pose alors, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $d_i=\dfrac{c_i}{K}$, on a $\sum_{i=1}^n d_i^2=1$.

   La cas précédent assure que $E\left(\left|\sum_{i=1}^n d_iX_i\right|^p\right)^{1/p}\le\beta_p$, par linéarité de l'espérance cela donne $\dfrac{1}{K}E\left(\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|^p\right)^{1/p}\le\beta_p$, i.e. $E\left(\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|^p\right)^{1/p}\le\beta_pK$.

   On a bien $\boxed{E\left(\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|^p\right)^{1/p}\le\beta_pE\left(\left(\sum_{i=1}^n c_iX_i\right)^2\right)^{1/2}}$.

12. Posons $U=\left(\sum_{i=1}^n c_iX_i\right)^2$, notons $0\le u_1<\cdots<u_r$ les valeurs prises par U.

    Puisque $p\ge 2$ la fonction $t\mapsto t^{p/2}$ est convexe, on a donc :

    $$E\left(\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|^p\right)=E(U^{p/2})=\sum_{i=1}^r P(U=u_i)u_i^{p/2}\ge\left(\sum_{i=1}^r P(U=u_i)u_i\right)^{p/2}=\left(E\left(\sum_{i=1}^n c_iX_i\right)^2\right)^{p/2}$$

    On a bien $\boxed{E\left(\left|\sum_{i=1}^n c_iX_i\right|^p\right)^{1/p}\ge\left(E\left(\sum_{i=1}^n c_iX_i\right)^2\right)^{1/2}}$.

13. Posons $\boxed{\theta=\dfrac{p}{4-p}}$.

    On a $\dfrac{\theta}{p}+\dfrac{1-\theta}{4}=\dfrac{1}{4-p}+\dfrac{1-p/2}{4-p}=\dfrac{2-p/2}{4-p}=\dfrac{1}{2}$.

On a $\theta > 0$ car $p > 0$ et $p < 4$; de plus $\theta < 1$ car $1 - \theta = 2\dfrac{2-p}{4-p} > 0$.

14. Posons $X = \left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^{2\theta}$ et $Y = \left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^{2(1-\theta)}$, appliquons la question 3 légitimement car $\dfrac{2\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{2} = 1$, on a $E(XY) \leq E\left(X^{p/(2\theta)}\right)^{2\theta/p} E\left(Y^{2/(1-\theta)}\right)^{(1-\theta)/2}$, ce qui s'écrit :
$$\boxed{E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right) \leq E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{2\theta/p} E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^4\right)^{(1-\theta)/2}}.$$

15. *Remarque : l'énoncé des questions 15 et 16 est déroutant puisque la question 16 reprend simplement la propriété de la question 15 (en oubliant de demander $\alpha_p > 0$), en "ajoutant" le cas $p \geq 2$ qui a été traité à la question 12. De plus, comme à la question 11, l'indépendance de α_p à n n'est pas clairement demandée.*

D'après la question 11 on a $E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^4\right)^{1/4} \leq \beta_4 E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2}$

puisque $1 - \theta > 0$, on en déduit $E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^4\right)^{(1-\theta)/2} \leq \beta_4^{2(1-\theta)} E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1-\theta}$

En utilisant la question 14 on obtient alors
$$E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right) \leq \beta_4^{2(1-\theta)} E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{2\theta/p} E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1-\theta};$$

on en déduit $E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{\theta} \leq \beta_4^{2(1-\theta)} E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{2\theta/p}$;

ce qui donne $\beta_4^{(\theta-1)/\theta} E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right)^{1/p}$

On obtient le résultat en posant $\boxed{\widetilde{\alpha}_p = \beta_4^{1-1/\theta} = \beta_4^{2-\frac{4}{p}}}$ qui est bien strictement positif puisque β_4 l'est.

16. *Remarque : pour répondre à la question ainsi énoncée, il suffit de poser $\alpha_p = 0$, mais ce n'est bien sûr pas ce qui est attendu.*

Si $p < 2$ on applique la question 15, si $p \geq 2$ on applique la question 12 (avec $\alpha_p = 1$), on a a bien le résultat voulu.

17. • φ est à, valeurs réelles et est symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$.
• Soient X, Y et Z dans $L^0(\Omega)$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$\varphi(\lambda X + \mu Y, Z) = E(\lambda XZ + \mu YZ) = \lambda E(XZ) + \mu E(YZ) = \lambda\varphi(X, Z) + \mu\varphi(Y, Z)$.
φ est linéaire à gauche et donc bilinéaire par symétrie.
• Soit X dans $L^0(\Omega)$, $\varphi(X, X) = E(X^2) \geq 0$; φ est positive.
• Soit X dans $L^0(\Omega)$ tel que $\varphi(X, X) = 0$, on a $E(X^2) = 0$ donc $\|X\|_2 = 0$ donc $X = 0$; φ est définie positive.
En conséquence φ est un produit scalaire sur $L^0(\Omega)$.

18. *Remarque : question mal posée. Pour "conserver* **le** *produit scalaire" il faudrait qu'il n'y ait qu'un produit scalaire, or ici il y a deux produits scalaires et l'énoncé ne spécifie pas vraiment lesquels. Il faut comprendre que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est muni du produit scalaire introduit au début du sujet, que $L^0(\Omega)$ est muni de φ et alors que le produit scalaire des images de deux vecteurs par ψ est égal au produit scalaire des vecteurs d'origine.*
   - Soit u dans $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, on peut poser $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i > n$, $u_i = 0$.

   On a alors $\psi(u) = \sum_{i=0}^{n} u_i X_i$ qui est dans $L^0(\Omega)$.
   - Soient u et v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on peut poser $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i > n$, $u_i = v_i = 0$.

   On a $\langle u, v\rangle = \sum_{i=0}^{n} u_i v_i$ et avec la même méthode qu'à la question 10 :

   $$\varphi(\psi(u), \psi(v)) = E\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} u_i u_j X_i X_j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} u_i u_j E(X_i X_j) = \sum_{i=0}^{n} u_i v_i = \langle u, v\rangle.$$
19. Soit $p \in [1, +\infty[$.
   Pour tout X dans R, il existe $u \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ tel que $X = \psi(u)$. En posant $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i > n$, $u_i = 0$, les inégalités de Khintchine appliquées à $\sum_{i=0}^{n} u_i X_i$ assurent que $\alpha_p \|X\|_2 \leq \|X\|_p \leq \beta_p \|X\|_2$.
   Les normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_p$ sur R sont équivalentes.
   Par transitivité cela assure que pour tous p et q dans $[1, +\infty[$, les normes $\|.\|_p$ et $\|.\|_q$ sur R sont équivalentes.
20. Appliquons les inégalités de Khintchine pour $p = 1$ à $X = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i$, on a donc :

   $$\alpha_1 E\left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leq E\left(\left|\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right|\right) \leq \beta_1 E\left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right)^2\right)^{1/2}.$$
   En posant, $a_0 = 0$ et, pour tout $i > k$, $a_i = 0$, on a $X = \psi((a_i)_{i\in\mathbb{N}})$, la question 18 assure alors que $E\left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right)^2\right)^{1/2} = \|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)^{1/2} = \|(a_1, \dots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k}$.
   Par ailleurs, par théorème de transfert on a :
   $$E\left(\left|\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right|\right) = \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i\right| P((X_1, \dots, X_k) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k))$$
   $$= \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i\right| \frac{1}{2^k} = \frac{1}{n} \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i\right|.$$
   On a donc bien $\boxed{\alpha_1 n \|(a_1, \dots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k} \leq \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i\right| \leq \beta_1 n \|(a_1, \dots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k}}$.
21. Considérons l'application T introduite par l'énoncé, cette application est linéaire de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$.

• Montrons que T est injective, posons donc $(a_1, \ldots, a_k)$ dans $\ker(T)$.

Soit $j \in [\![1, k]\!]$, en utilisant la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = (1, \ldots, 1)$ on a $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i = 0$, en utilisant la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ où les ε_i valent 1 sauf ε_j qui vaut -1 on a $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i - 2a_j = 0$, on en déduit donc $a_j = 0$.
On a $\ker(T) = \{0\}$, T est injective.
Par théorème du rang, on en déduit que $\boxed{T(\mathbb{R}^k) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^n \text{ de dimension } k}$.
• Soit $x \in T(\mathbb{R}^k)$, on peut poser $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que $x = T(a_1, \ldots, a_k)$.
On a par définition $\|x\|_1^{\mathbb{R}^n} = \sum\limits_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i\right|$ et par ailleurs :

$$\left(\|x\|_2^{\mathbb{R}^n}\right)^2 = \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i\right)^2 = \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_ia_j\varepsilon_i\varepsilon_j\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \left(a_ia_j \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \varepsilon_i\varepsilon_j\right)$$

Soit $(i,j) \in [\![1, k]\!]^2$

— si $i = j$, on a $\sum\limits_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \varepsilon_i\varepsilon_j = \sum\limits_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} 1 = 2^k = n\,$;

— si $i \neq j$ on a $\sum\limits_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \varepsilon_i\varepsilon_j = 0$ car il y a 2^k termes dans la somme qui se décomposent en 2^{k-2} termes où $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 1$, 2^{k-2} termes où $\varepsilon_i = \varepsilon_j = -1$, 2^{k-2} termes où $\varepsilon_i = 1$ et $\varepsilon_j = -1$, 2^{k-2} termes où $\varepsilon_i = -1$ et $= \varepsilon_j = 1$.

On a donc $\left(\|x\|_2^{\mathbb{R}^n}\right)^2 = n\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2$, i.e. $\|x\|_2^{\mathbb{R}^n} = \sqrt{n}\,\|(a_1, \ldots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k}$.
En reprenant l'encadrement de la question 20 on obtient ainsi :
$\boxed{\alpha_1\sqrt{n}\,\|x\|_2^{\mathbb{R}^n} \leq \|x\|_1^{\mathbb{R}^n} \leq \beta_1\sqrt{n}\,\|x\|_2^{\mathbb{R}^n}}$, encadrement valide sur $T(\mathbb{R}^k)$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.