

Programme de colle – MPI

1. Calcul différentiel

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	
Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v .	Notations $D_v f(a)$, $D_v f$.
Dérivées partielles dans une base.	Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$.
b) Différentielle	
Application différentiable au point a .	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1. Lorsque $f = (f_1, \dots, f_p)$, f est différentiable en a si et seulement si toutes les f_i le sont.
Si f est différentiable en a , alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur. Différentielle de f en a , encore appelée application linéaire tangente à f en a . Unicité de la différentielle et relation $df(a) \cdot v = D_v f(a)$. Application différentiable sur un ouvert Ω . Différentielle sur Ω . Cas particuliers : application constante, application linéaire. Lien entre différentielle et dérivées partielles.	Notations $df(a)$. Notation df . Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, la matrice jacobienne de f en a est la matrice de $df(a)$ dans les bases canoniques.
Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = df(a) \cdot 1$. Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a . Expression du gradient en base orthonormée.	Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique : si $\nabla f(a) \neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.
c) Opérations sur les applications différentiables	
Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1, \dots, f_p)$ où M est multilinéaire et où $f_1, \dots, f_p$ sont des applications différentiables. Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables. Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t , si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + tv$. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$. Dérivées partielles de $(u_1, \dots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m)).$
d) Applications de classe $\mathcal{C}^1$	
Une application f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si df est continue sur Ω . L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω . Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$. Si f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans F , si γ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans Ω , si $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, alors : $f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$	La démonstration n'est pas exigible. Cas particulier $\gamma(t) = a + tv$ pour tout $t \in [0, 1]$. Démonstration pour Ω convexe.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie	Notation $T_x X$ pour l'ensemble des vecteurs tangents à X en x . Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La démonstration de cet énoncé et le théorème des fonctions implicites sont hors programme. Traduction en termes de gradient si E est euclidien, en particulier pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Exemple : plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une équation.
f) Optimisation : étude au premier ordre	Exemples de recherches d'extremums globaux. Si E est euclidien, traduction en termes de gradient. Exemples de recherches d'extremums sous contrainte.
g) Applications de classe $\mathcal{C}^k$	Notations $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}, \partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f, \partial_{j_1, \dots, j_k} f$. La notion de différentielle seconde est hors programme. Démonstration non exigible. Les démonstrations ne sont pas exigibles. Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

2. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Compléments sur les groupes	
Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.	
Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps. Théorème chinois : isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $m \wedge n = 1$; extension à plus de deux facteurs. Indicatrice d'Euler φ . Calcul à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers.	Notation $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier. Application aux systèmes de congruences et à la résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Relation $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux; expression de $\varphi(p^k)$ pour p premier.
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat.

3. Révisions

Tout exercice portant sur le programme de MPI peut être posé.

4. Questions de cours

- (i) * Les vecteurs tangents en un extremum local d'une application différentiable sont dans le noyau de la différentielle en ce point.
Théorème d'optimisation sous contrainte.
- (ii) * Si p est premier et $k \in \mathbb{N}^*$, calcul de $\varphi(p^k)$, d'où une expression de $\varphi(n)$ à l'aide de ses diviseurs premiers. Théorème d'Euler, d'où le petit théorème de Fermat.
- (iii) * **Théorème Chinois** : L'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ (k \bmod nm) & \longmapsto (k \bmod n, k \bmod m) \end{cases}$$

est bien définie et un isomorphisme d'anneaux.
L'application

$$g : \begin{cases} (\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})^\times & \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \\ (k \bmod nm) & \longmapsto (k \bmod n, k \bmod m) \end{cases}$$

est bien définie et un isomorphisme de groupes (multiplicatifs) (sans utiliser l'égalité des cardinaux qui en est une conséquence).

(iv) * **Exercice classique : différentielle du déterminant**

- (a) Calculer la différentielle et le gradient en toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'application $\det$ en passant par un calcul de dérivées partielles.
- (b) Retrouver ce résultat en montrant que $\det \circ \exp = \exp \circ \text{tr}$ et en utilisant la différentielle en O_n de $\exp$.
On commencera par calculer $d\det(I_n)$.

(v) * **Exercice classique** Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\text{tr } M, \text{tr}(M^2), \dots, \text{tr}(M^n)) \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Montrer que f est différentiable en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $df(M)$.
- (b) Relier le rang de $df(M)$ et le degré du polynôme minimal de M .
- (c) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Exercices CCINP

■ **CCINP 41 : Optimisation sous contrainte**

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.
Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C .
2. Soit $(u, v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.
(a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié

$$(S) : \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$$

- (b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$. En déduire les valeurs possibles de λ .
3. Déterminer les valeurs possibles de (u, v) , puis donner le maximum et le minimum de f sur C .

■ **CCINP 56 : Optimisation sur un compact** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 3.$$

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0, 1] \times [0, 1]$.
Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

■ **CCINP 57 :**

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
(a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.
(b) Donner la définition de « f différentiable en $(0, 0)$ ».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

■ **CCINP 58 : différentielle d'une application bilinéaire**

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $a \in E$ et soit $f : E \rightarrow F$ une application.
Donner la définition de « f différentiable en a ».
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

On pose $\forall x \in E, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $\forall (x, y) \in E \times E, \|(x, y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.

On admet que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E \times E$.
Soit $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E .

- (a) Prouver que

$$\exists C \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in E \times E, |B(x, y)| \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty.$$

- (b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

■ **CCINP 86 : Preuve directe du petit théorème de Fermat**

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
(a) Prouver que $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, p$ divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
(b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \pmod{p}$.
Indication : procéder par récurrence.
(c) En déduire, pour tout entier naturel n , que : p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

■ **CCINP 94 : Système de congruences**

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$ n'a pas de solution appartenant à $\mathbb{Z}$.
2. (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
(b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$.
Prouver que $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.
3. On considère le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{17} \\ x \equiv 5 \pmod{16} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
(a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
(b) Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).