

1. Montrer que $f : M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1}$ est différentiable sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et donner sa différentielle en toute $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\exp$ est différentiable en O_n et préciser $d(\exp)(O_n)$.

Solution de 1 :

1. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$.
Pour toute matrice H , on peut factoriser $M + H$ par M

$$M + H = M(I_n + M^{-1}H).$$

Si H est telle que $\|H\|$ soit suffisamment petite, on a $\| -M^{-1}H \| \leq \|M^{-1}\| \|H\| < 1$.

D'après le cours, comme $\| -M^{-1}H \| < 1$, la matrice $I_n - (-M^{-1}H) = I_n + M^{-1}H$ est inversible et son inverse est donné par la somme de la série absolument convergente

$$(I_n + M^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-M^{-1}H)^k = I_n - M^{-1}H + \sum_{k=2}^{+\infty} (-M^{-1}H)^k.$$

Majorons le reste de cette série pour montrer qu'il s'agit d'un $o(\|H\|)$. Par inégalité triangulaire et sous-multiplicativité,

$$\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} (-M^{-1}H)^k \right\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \|M^{-1}H\|^k = \|M^{-1}H\|^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \|M^{-1}H\|^j = \frac{\|M^{-1}H\|^2}{1 - \|M^{-1}H\|}$$

Puisque $\|M^{-1}H\| \leq \|M^{-1}\| \|H\|$, ce reste est majoré par une quantité de l'ordre de $\|H\|^2$. C'est donc bien un $o_{H \rightarrow O_n}(\|H\|)$.

On obtient ainsi le développement limité

$$(I_n + M^{-1}H)^{-1} = I_n - M^{-1}H + o_{H \rightarrow O_n}(H)$$

En reportant ce résultat dans l'expression de l'inverse de $M + H$

$$(M + H)^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1} M^{-1} = \left(I_n - M^{-1}H + o_{H \rightarrow O_n}(H) \right) M^{-1} = M^{-1} - M^{-1}H M^{-1} + o_{H \rightarrow O_n}(H)$$

L'application $H \mapsto -M^{-1}H M^{-1}$ étant linéaire, on conclut que l'application f est différentiable en M et que sa différentielle s'écrit $df(M) : H \mapsto -M^{-1}H M^{-1}$

2. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par définition de l'exponentielle

$$\exp(H) = I_n + H + H \cdot \eta(H)$$

où $\eta(H) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{H^p}{(p+1)!}$. On peut majorer cette expression en utilisant une norme $\|\cdot\|$ d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\|\eta(H)\| \leq \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)!} \|H\|^p \leq \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!} \|H\|^p = \exp(\|H\|) - 1$$

donc $\eta(H) \xrightarrow{H \rightarrow O_n} O_n$.

Finalement, $\exp(O_n + H) = \exp(O_n) + H + o_{H \rightarrow O_n}(\|H\|)$, l'application $H \mapsto H$ étant linéaire, on conclut que l'exponentielle est différentiable en O_n avec $d \exp(O_n) = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

2 Différentielle du déterminant

1. Justifier que $\det$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer, pour toute matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(\exp H) = \exp(\operatorname{tr} H)$.
3. En utilisant $d(\exp)(O_n) = \operatorname{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, déterminer la différentielle en I_n de $\det$.
4. En déduire la différentielle en n'importe quelle $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ de $\det$.
5. Donner la différentielle de $\det$ en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Solution de 2 : Différentielle du déterminant

1. La classe $\mathcal{C}^1$ de l'application $\det : A \mapsto \det A$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne fait guère de doute car c'est une application polynomiale en les coefficients de A .
2. Cette formule s'obtient facilement en trigonalisant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre. D'après la question précédente, il existe une fonction ε telle que $\xrightarrow{H \rightarrow O_n} \varepsilon(H) = O_n$ et

$$\exp(H) = I_n + H + \|H\| \varepsilon(H)$$

Notons ϕ la différentielle de $\det$ en I_n qui, rappelons-le, est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On a d'abord

$$\begin{aligned} \det(\exp H) &= \det(I_n + H + \|H\| \varepsilon(H)) \\ &= \det(I_n) + \phi(H + \|H\| \varepsilon(H)) + \underset{H \rightarrow O_n}{o}(\|H + \|H\| \varepsilon(H)\|) \\ &= 1 + \phi(H) + \|H\| \phi(\varepsilon(H)) + \|H + \|H\| \varepsilon(H)\| \eta(H) \end{aligned}$$

avec $\xrightarrow{H \rightarrow O_n} \eta(H) = 0$.

- * Par continuité de l'application linéaire ϕ , on a $\xrightarrow{H \rightarrow O_n} \phi(\varepsilon(H)) = 0$ donc $\|H\| \phi(\varepsilon(H)) = \underset{H \rightarrow O_n}{o}(H)$.
- * Par inégalité triangulaire et norme d'algèbre

$$\| \|H + \|H\| \varepsilon(H)\| \eta(H) \| \leq \|H\| \cdot \underbrace{(1 + \|\varepsilon(H)\|)}_{\rightarrow 0} \cdot \|\eta(H)\|$$

$$\text{donc } \|H + \|H\| \varepsilon(H)\| \eta(H) = \underset{H \rightarrow O_n}{o}(H).$$

D'où finalement

$$\det(\exp H) = 1 + \phi(H) + o(\|H\|) = 1 + d(\det)(I_n)(H) + o(\|H\|)$$

Remarque : on redémontre en fait ici une formule du cours à venir sur la différentielle d'une composée (règle de la chaîne)

$$d(\det \circ \exp)(O_n)(H) = d \det(\exp(O_n))(d \exp(O_n)(H)) = d \det(I_n)(H)$$

- Mais d'autre part

$$\det(\exp H) = \exp(\operatorname{tr} H) = 1 + \operatorname{tr} H + \delta(H)$$

où $|\delta(H)| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} |\operatorname{tr} H|^n$. Il existe k tel que, pour tout H , $|\operatorname{tr} H| \leq k \|H\|$ par continuité d'application linéaire sur un espace de dimension finie, ce qui permet de conclure facilement que $\delta(H) = \underset{H \rightarrow O_n}{o}(\|H\|)$.

Remarque : de nouveau, avec la future formule du cours

$$d(\exp \circ \operatorname{tr})(O_n)(H) = \exp'(\operatorname{tr}(O_n)) \times (d(\operatorname{tr})(O_n)(H)) = 1 \times \operatorname{tr}(H)$$

car la trace étant linéaire, sa différentielle en tout point est elle-même.

- Et on conclut par unicité de la différentielle avec la formule $d(\det)(I_n) = \operatorname{tr}$

4. Puisque A est inversible, on peut écrire

$$\det(A+H) = \det(A) \det(I_n + A^{-1}H) = \det(A) \left(1 + \operatorname{tr}(A^{-1}H) + o_{H \rightarrow 0_n}(\|H\|) \right)$$

En effet, un $o_{H \rightarrow 0_n}(\|A^{-1}H\|)$ est un $o_{H \rightarrow 0_n}(\|H\|)$, comme on le voit avec une norme d'algèbre pour laquelle

$$\|A^{-1}H\| \leq \|A^{-1}\| \times \|H\|$$

On en déduit par la formule de la comatrice que la différentielle en A est

$$d(\det)(A) : H \longrightarrow \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}H) = \operatorname{tr}((\operatorname{Com} A)^T H) = (\operatorname{Com} A | H)$$

5. Les applications $d(\det)$ et $A \mapsto (\operatorname{Com} A | \cdot)$ sont continues car $\det$ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour la première, et pour la deuxième, cela vient de la continuité de l'application comatrice (polynomiale) et de la bilinéarité du produit scalaire sur un espace de dimension finie. Elles coïncident sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ classiquement dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc sont égales.