

Programme de colle – MPI

1. Calcul différentiel

Seule la définition de la différentielle a été vue et peut donner lieu à des exercices.

Tout le chapitre pour les fonctions définie sur $\mathbb{R}^n$ sans différentielle est au programme cette semaine, avec l'ajout de l'optimisation sous contrainte (extramums liés).

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Différentielle	
Application différentiable au point a .	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.
Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .	
Différentielle de f en a , encore appelée application linéaire tangente à f en a .	Notation $df(a)$.
Application différentiable sur un ouvert Ω .	
Différentielle sur Ω .	Notation df .
Cas particuliers : application constante, application linéaire.	
Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = df(a) \cdot 1$.	
f) Optimisation : étude au premier ordre	
Théorème d'optimisation sous une contrainte : si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, si X est l'ensemble des zéros de g , si $x \in X$ et $\nabla g(x) \neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x , alors $\nabla f(x)$ est colinéaire à $\nabla g(x)$.	Exemples de recherches d'extremums sous contrainte.

2. EDL

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E . Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n .	Forme matricielle : système différentiel linéaire $X' = A'(t)X + B(t).$ Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Cas des équations scalaires d'ordre n .	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation aux systèmes différentiels linéaires.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$. Pour t_0 dans I , l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E .
Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n .
Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées :
 $a(t)x' + b(t)x = c(t), \quad a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t).$

Exemples de recherche de solutions développables en série entière.

d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Résolution du problème de Cauchy

$$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$

si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E .

Traduction matricielle.
Pour les calculs explicites, on se limite aux deux cas suivants : a diagonalisable ou $\dim(E) \leq 3$.

e) Variation des constantes

Pour une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, wronskien d'un couple de solutions. Caractérisation des bases de l'espace des solutions.
Méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2.

Remarque : la méthode de variations des constantes n'est plus au programme pour un système différentiel en général. Seule celle des EDL d'ordre 2 l'est désormais.

3. Questions de cours

- Les questions de cours munies d'un astérisque ***** ne sont posables qu'aux trinômes 6 et 7.
 - Les membres de ces trois trinômes doivent savoir faire tous les exercices CCINP mais ne seront éventuellement interrogés que sur les exercices 31, 32, 41, 58, 75.
- (i) ***** Si A et B commutent, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
Les solutions du système différentiel à coefficients constant $X'(t) = AX(t)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \mapsto \exp(tA)C$ où $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Expression de la solution à un problème de Cauchy.
- (ii) ***** Donner une équation différentielle dont le wronskien d'un système fondamental de solutions de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ est solution puis montrer que (f, g) est un système fondamental de solutions ssi leur wronskien prend une valeur non nulle ssi leur wronskien n'est jamais nul.
- (iii) ***** Exercice classique : calculs de différentielles
- Montrer que $f : M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1}$ est différentiable sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et donner sa différentielle en toute $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
 - Montrer que $\exp$ est différentiable en O_n et préciser $d(\exp)(O_n)$.
- (iv) ***** Exercice classique : différentielle de det
- Justifier que $\det$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Démontrer, pour toute matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(\exp H) = \exp(\text{tr } H)$.
 - En utilisant $d(\exp)(O_n) = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, déterminer la différentielle en I_n de $\det$.
À la main : la différentielle d'une composée n'a pas encore été vue.
 - En déduire la différentielle en n'importe quelle $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ de $\det$.
 - Donner la différentielle de $\det$ en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.
- (v) Exercices CCINP : 31, 32, 41, 42, 57, 58, 66, 74, 75.

4. Exercices CCINP

■ CCINP 31 :

- Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
- Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

■ CCINP 32 :

 Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

- Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.
- Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0, 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $] -1, 1[$?

■ CCINP 41

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2.$$

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$.

- Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C .
- Soit $(u, v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.
(a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié

$$(S) : \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$$
- (b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$. En déduire les valeurs possibles de λ .
- Déterminer les valeurs possibles de (u, v) , puis donner le maximum et le minimum de f sur C .

■ CCINP 42 :

 On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

- Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

■ CCINP 57

- Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
(a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.
(b) Donner la définition de « f différentiable en $(0, 0)$. »
- On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

■ CCINP 58

- Soit E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $a \in E$ et soit $f : E \rightarrow F$ une application.
Donner la définition de « f différentiable en a ».
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

On pose $\forall x \in E, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $\forall (x, y) \in E \times E, \|(x, y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.

On admet que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E \times E$.

Soit $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E .

(a) Prouver que

$$\exists C \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in E \times E, |B(x, y)| \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty.$$

(b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

■ CCINP 74 :

- On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

(b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

- On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t , dérivables sur $\mathbb{R}$.

En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

■ CCINP 75 :

 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
- On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A .

Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

On donnera explicitement les valeurs de a, b et c .

- En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.