

Sujet CCINP (3 exercices et 1 problème)

Exercice 1 – MPI Maths 1 2023

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.
Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

$$N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

1. Démontrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

par :

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

On note S la sphère unité définie par : $S = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_\infty = 1\}$.

2. Démontrer que $\forall X \in S, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leq N(A)$.

En déduire, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'existence de $\sup_{X \in S} \|AX\|_\infty$.

On pose alors, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sup_{X \in S} \|AX\|_\infty$.

3. Démontrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|X\|_\infty$.

4. Démontrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\| = N(A)$.

5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\|A\|$.

Exercice 2 – MP Maths 2 2020

On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pourra utiliser librement dans cet exercice que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Démontrer que l'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier que :

$$\exists \rho > 0, \forall \lambda \in]0, \rho[, M - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

Démontrer que l'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Application :

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que les matrices $A \cdot B$ et $B \cdot A$ ont le même polynôme caractéristique.

A l'aide des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.

5. Démontrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

On rappelle que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est une partie connexe par arcs.

Exercice 3 – MPI Maths 2 2025

On définit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

1. Donner le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n .
2. Justifier que pour tout réel θ :

$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

1. Justifier la convergence de cette intégrale.
2. Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).
3. Calculer pour n et m entiers naturels, $\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta$.
4. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

Problème – MP Maths 2 2020

Dans ce problème, E est un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire que l'on notera $\langle \cdot | \cdot \rangle$ de norme associée $\| \cdot \|$.

Un endomorphisme u de E est une similitude de E lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout vecteur x de E , $\|u(x)\| = k\|x\|$. On dira que u est la similitude de rapport k .

On notera $\text{Sim}(E)$, l'ensemble des similitudes de E .

$O(E)$ désigne l'ensemble des isométries (ou automorphismes orthogonaux) de E .

L'objectif de ce problème est de définir et de caractériser les similitudes d'un espace euclidien.

Partie I - Exemples, propriétés

1. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice d'une similitude u dont on précisera le rapport.

2. **Interprétation géométrique avec la similitude u de la question précédente.**

Le plan $\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère les trois points $M(2, 1)$, $N(4, 1)$, $P(4, 2)$ et on définit les points M' , N' , P' par les relations $u(\vec{OM}) = \vec{OM'}$, $u(\vec{ON}) = \vec{ON'}$, $u(\vec{OP}) = \vec{OP'}$.

Représenter les triangles MNP et $M'N'P'$ et comparer leurs aires.

3. Démontrer que tout élément de $\text{Sim}(E)$ est bijectif et établir que $\text{Sim}(E)$, muni de la loi de composition, est un groupe.

4. Soient u un endomorphisme de E , $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Démontrer que u est une isométrie de E , si et seulement si, $A^T A = I_n$.

Caractériser par une relation matricielle une similitude de rapport k .

5. **Exemple**

Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique

de $\mathbb{R}^3$ d'une similitude u dont on donnera le rapport.

Donner la matrice de la similitude u^{-1} .

Vérifier que, pour tout élément f de $O(E)$, $u^{-1} \circ f \circ u \in O(E)$.

6. On appelle sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$, l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\| = r$.

Démontrer que si u est un endomorphisme de E tel que l'image par u de toute sphère de E de centre 0 est une sphère de E de centre 0, alors u est une similitude de E .

On pourra remarquer que pour y vecteur non nul, $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1$.

Partie II - Assertions équivalentes

7. On rappelle qu'une homothétie vectorielle de E est une application de la forme αid_E .

Démontrer que $u \in \text{Sim}(E)$, si et seulement si, u est la composée d'une homothétie vectorielle non nulle de E et d'un élément de $O(E)$.

8. **Exemple**

Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ comme produit de la matrice d'une homothétie vectorielle et de la matrice d'une isométrie de $\mathbb{R}^2$ dont on précisera la nature.

9. Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2, \langle x | y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.

En déduire que u est une similitude de rapport k , si et seulement si,

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = k^2 \langle x | y \rangle.$$

10. Démontrer que, si u est une similitude de rapport k , alors, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , $\langle x | y \rangle = 0 \implies \langle u(x) | u(y) \rangle = 0$.

On dit que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité.

Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Démontrer que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle e_i + e_j | e_i - e_j \rangle = 0,$$

puis que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|.$$

On note k la valeur commune prise par tous les $\|u(e_i)\|$.

Après avoir justifié que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|u(e_i)\| = k\|e_i\|$, démontrer que u est une similitude de rapport k .

11. Soit u une application de E dans E (non supposée linéaire) telle qu'il existe un réel $k > 0$ pour lequel

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = k^2 \langle x | y \rangle.$$

Démontrer que u est un endomorphisme de E , puis que u est une similitude de E .