

EXERCICE I

Q1. Soit une application $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 .

Justifier que $f'([-1, 1[)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

Q2. On considère l'application $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } t \in]-1, 0] \\ \left(t^2 \sin \frac{1}{t}, t^2 \cos \frac{1}{t}\right) & \text{si } t \in]0, 1[\end{cases}$$

On note pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Démontrer que f est dérivable en 0 puis sur l'intervalle $] -1, 1[$.

Préciser le vecteur $f'(t)$ pour tout $t \in]-1, 0]$ et pour tout $t \in]0, 1[$.

b) Démontrer que $\forall t \in]0, 1[, \|f'(t)\|_2 \geq 1$ et en déduire que $f'([-1, 1[)$ n'est pas connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

On pourra tracer la boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ et on acceptera un dessin pertinent comme preuve.

EXERCICE II

On pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2 - x - y)^2 + (1 - x)^2 + (1 - 2x - y)^2$.

On se propose de déterminer le réel $\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$ par deux méthodes différentes.

Q3. Première méthode

Déterminer le seul point critique de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$. Démontrer à l'aide d'une matrice Hessienne que f admet en ce point un minimum local.

En admettant que ce minimum est global, donner la valeur de $\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$.

Q4. Deuxième méthode

Sur l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$, on note le produit scalaire canonique par $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et sa norme associée par $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

On note $a = (2, 1, 1)$, $u = (1, 1, 2)$, $v = (1, 0, 1)$ et $F = \text{vect}\{u, v\}$.

On note $b \in F$ le projeté orthogonal du vecteur a sur le sous-espace vectoriel F .

Justifier que $\langle a - b | u \rangle = \langle a - b | v \rangle = 0$ et en déduire le vecteur b .

Déterminer la valeur de $\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$.

EXERCICE II. PROJECTION ORTHOGONALE

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel euclidien des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni du produit scalaire canonique défini pour A et B matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par : $(A|B) = \text{trace}({}^tAB)$.

II.1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que vaut le réel $(A|A')$?

II.2. On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Donner, pour le produit scalaire canonique, une base orthonormée de $\mathcal{T}$ et de son orthogonal $\mathcal{T}^\perp$.

II.3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer le projeté orthogonal de la matrice A sur $\mathcal{T}$, ainsi que la distance de la matrice A à $\mathcal{T}$.

PROBLEME III. SURJECTIVITE DE L'APPLICATION EXPONENTIELLE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ VERS $\text{GL}_n(\mathbb{R})$

On note, pour n entier $n \geq 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

On notera $1 \leq i, j \leq n$ pour indiquer que : $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

Partie préliminaire

Une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une norme d'algèbre si elle vérifie la propriété : pour tout couple de matrices (A, B) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

III.1. On note pour $A = (a_{i,j})$ élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$ et $\|A\| = n \|A\|_\infty$.

L'application $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que c'est une norme d'algèbre.

Dans la suite de cette partie préliminaire, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de cette norme d'algèbre.

III.2. Justifier simplement qu'une série de vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ absolument convergente est convergente.

III.3. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, établir que la série de réels positifs $\sum \left\| \frac{1}{k!} M^k \right\|$ converge et en déduire que la série de matrices $\sum \frac{1}{k!} M^k$ converge.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on notera $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$, exponentielle de la matrice M .

Première partie

On pourra utiliser librement le résultat suivant :

si T est une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, alors la matrice $\exp(T)$ est une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}$.

III.4. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, rappeler pourquoi la matrice M est trigonalisable et déterminer une relation entre $\det(\exp(M))$ et $e^{\text{tr}(M)}$.

III.5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -1 & -9 & 11 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Donner le déterminant de la matrice A . En déduire qu'il n'existe aucune matrice B à coefficients réels vérifiant $B^2 = A$ et qu'il n'existe aucune matrice M à coefficients réels vérifiant $\exp(M) = A$.

Objectifs et exemple

Ce paragraphe ne comporte aucune question, il permet de se familiariser avec les objectifs du problème.

Si A est une matrice carrée inversible à coefficients réels, nous allons démontrer dans ce problème :

- que pour tout entier naturel non nul p , il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $B^p = A$,
- qu'il existe une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(M) = A$.

On se limitera dans ce sujet aux matrices carrées de taille 3.

Le problème a pour objectif de prouver l'existence de ces matrices et de les expliciter.

On commence par un exemple développé dont le candidat pourra s'inspirer notamment pour la troisième partie.

On utilise toujours la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -1 & -9 & 11 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A = (X-2)^2(X+3)$.

On cherche le reste dans la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme χ_A de la forme $aX^2 + bX + c$ où a , b et c vont dépendre de n .

Pour cela on remplace dans la relation $X^n = \chi_A Q + aX^2 + bX + c$, X par -3 , puis par 2 . Ensuite, on dérive cette expression et on remplace à nouveau X par 2 (Q est le quotient).

On obtient le système suivant
$$\begin{cases} 9a - 3b + c = (-3)^n \\ 4a + 2b + c = 2^n \\ 4a + b = n2^{n-1} \end{cases}$$

admettant pour unique solution
$$\begin{cases} a = \frac{1}{25}((-3)^n - 2^n + 5n2^{n-1}) \\ b = \frac{1}{25}(-4(-3)^n + 4 \cdot 2^n + 5n2^{n-1}) \\ c = \frac{1}{25}(4(-3)^n + 21 \cdot 2^n - 30n2^{n-1}) \end{cases}.$$

On déduit du théorème de Cayley-Hamilton que pour tout entier naturel n ,

$$A^n = aA^2 + bA + cI_3$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -(-3)^n + 6.2^n & -6.(-3)^n + 6.2^n & 6.(-3)^n - 6.2^n \\ 2.(-3)^n - 2.2^n + 5n2^{n-1} & 12.(-3)^n - 7.2^n + 5n2^{n-1} & -12.(-3)^n + 12.2^n - 5n2^{n-1} \\ (-3)^n - 2^n + 5n2^{n-1} & 6.(-3)^n - 6.2^n + 5n2^{n-1} & -6.(-3)^n + 11.2^n - 5n2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On pose alors, pour tout réel t , la matrice $\gamma(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$\gamma(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3^t e^{i\pi t} + 6.2^t & -6.3^t e^{i\pi t} + 6.2^t & 6.3^t e^{i\pi t} - 6.2^t \\ 2.3^t e^{i\pi t} - 2.2^t + 5t2^{t-1} & 12.3^t e^{i\pi t} - 7.2^t + 5t2^{t-1} & -12.3^t e^{i\pi t} + 12.2^t - 5t2^{t-1} \\ 3^t e^{i\pi t} - 2^t + 5t2^{t-1} & 6.3^t e^{i\pi t} - 6.2^t + 5t2^{t-1} & -6.3^t e^{i\pi t} + 11.2^t - 5t2^{t-1} \end{pmatrix}.$$

On a les résultats suivants :

- $\gamma(-1) = A^{-1}$,
- pour tout entier naturel p non nul : $\left(\gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^p = A$,
- $\exp(\gamma'(0)) = A$.

Par exemple,

$$B = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} + 6\sqrt{2} & -6i\sqrt{3} + 6\sqrt{2} & 6i\sqrt{3} - 6\sqrt{2} \\ 2i\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{4} & 12i\sqrt{3} - 7\sqrt{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{4} & -12i\sqrt{3} + 12\sqrt{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{4} \\ i\sqrt{3} - \sqrt{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{4} & 6i\sqrt{3} - 6\sqrt{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{4} & -6i\sqrt{3} + 11\sqrt{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

vérifie $B^2 = A$.

Deuxième partie

On notera F l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ combinaisons linéaires d'applications du type $x \mapsto x^k \rho^x e^{i\theta x}$ où $k \in \{0, 1, 2\}$, $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in]0, 2\pi[$.

(Rappel : pour $\rho \in]0, +\infty[$, $\rho^x = e^{x \ln \rho}$.)

III.6.

III.6.a. Déterminer un élément f de F vérifiant pour tout entier naturel n , $f(n) = \alpha(-3)^n + \beta n^2 2^n$, si α et β sont deux constantes complexes.

III.6.b. Si f est un élément de F et si x_0 est un réel, expliquer pourquoi $x \mapsto f(x + x_0)$ est encore un élément de F .

III.7.

III.7.a. Soit θ un réel. Démontrer que la suite de nombres complexes $\left(n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{i\theta n}\right)$ converge vers 0.

III.7.b. Soit $k_1 \in \{0,1,2\}$, $\rho_1 \in]0, +\infty[$, $\theta_1 \in]0, 2\pi]$, $k_2 \in \{0,1,2\}$, $\rho_2 \in]0, +\infty[$ et $\theta_2 \in]0, 2\pi]$, $\theta_1 \neq \theta_2$.

Démontrer que si α et β sont deux constantes complexes vérifiant, pour tout entier naturel n ,

$$\alpha n^{k_1} (\rho_1)^n e^{i\theta_1 n} + \beta n^{k_2} (\rho_2)^n e^{i\theta_2 n} = 0, \text{ alors } \alpha = \beta = 0.$$

On pourra, par exemple, supposer $\rho_1 \leq \rho_2$ et commencer par examiner les cas $\rho_1 < \rho_2$ et $\rho_1 = \rho_2$.

III.7.c. On admet alors que si f est un élément de F vérifiant pour tout entier naturel n , $f(n) = 0$, alors f est l'application nulle.

Que peut-on dire de deux applications f et g de F vérifiant pour tout entier naturel n , $f(n) = g(n)$?

III.8. Dans la suite de cette partie, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Expliquer pourquoi on peut trouver 9 applications $\omega_{i,j}$ éléments de F telles que, pour tout entier naturel n , $A^n = (\omega_{i,j}(n))_{1 \leq i, j \leq 3}$.

Discuter en fonction du nombre de racines du polynôme caractéristique de la matrice A .

On ne demande pas de résoudre des systèmes, une explication de la méthode pourra suffire.

III.9. On pose pour tout réel t , la matrice $\gamma(t) = (\omega_{i,j}(t))_{1 \leq i, j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

III.9.a. Quelles sont les matrices $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$?

III.9.b. Justifier que, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) , on a la relation :

$$\gamma(n+m) = \gamma(n)\gamma(m).$$

III.9.c. Pour x réel et m entier naturel, on pose $f(x) = \omega_{i,j}(x+m)$ et $g(x) = \sum_{k=1}^3 \omega_{i,k}(x) \omega_{k,j}(m)$.

Démontrer que l'on a $f = g$ et en déduire, pour tout entier naturel m , la relation $\gamma(x+m) = \gamma(x)\gamma(m)$.

III.9.d. En déduire que, pour tout couple (x, y) de réels, $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

III.10. Démontrer que $\gamma(-1) = A^{-1}$ et que, pour tout entier naturel p non nul, $\left(\gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^p = A$.

III.11. Justifier que l'application γ définie pour tout réel t par $\gamma(t) = (\omega_{i,j}(t))_{1 \leq i, j \leq 3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction γ est une solution de l'équation différentielle

$$u'(t) = \gamma'(0)u(t) \text{ vérifiant } u(0) = I_3$$

où la fonction inconnue u vérifie, pour tout réel t , $u(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Trouver la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $u'(t) = \gamma'(0)u(t)$ vérifiant $u(0) = I_3$ et en déduire que l'on a : $\exp(\gamma'(0)) = A$.

Troisième partie : exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III.12. Donner le polynôme caractéristique de la matrice A .

La matrice A est-elle diagonalisable ?

III.13. Déterminer, par la méthode développée dans ce problème, les éléments suivants :

III.13.a. La matrice A^{-1} .

III.13.b. Une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = A$.

III.13.c. Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(M) = A$.

Fin de l'énoncé