

2025

X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie.

1. Exprimer, pour k non nul, $P(X = k)$ en fonction de $P(X > k - 1)$ et de $P(X > k)$.

$$\text{Démontrer que pour tout } n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

$$\text{Démontrer le résultat de cours : } E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu.

Calculer, pour tout entier naturel k , $P(X \leq k)$, puis donner la loi de X .

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la 1, déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $E(X)$.

2024

Exercice I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$. Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration que pour tout entier naturel n , la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$.

1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour tout couple (P, Q) de polynômes de E ,

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx.$$

On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

2. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ noté $P_F(X^2)$.
3. Justifier que $\|X^2 - P_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|P_F(X^2)\|^2$ puis calculer le réel

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x} dx.$$

Exercice II

Soit $p \in]0, 1[, q = 1 - p$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé et suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$$

On considère les variables aléatoires Z et T définies par $Z = \sup(X, Y)$ et $T = \inf(X, Y)$.

1. Pour tout couple (m, n) d'entiers naturels, déterminer $P((Z = m) \cap (T = n))$ en distinguant trois cas : $m > n, m < n$ et $m = n$.
2. En déduire la loi de la variable aléatoire Z .

2020

$(T_{n,N})_{n \geq 1, N \geq 2}$ est une suite de variables aléatoires discrètes réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et vérifiant :

$$\forall n \geq 1, \forall N \geq 2, T_{n,N}(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

$$\text{avec } P(T_{n,N} = 0) = P(T_{n,N} = 1) = \frac{1}{N} \text{ et } P(T_{n,N} = 2) = 1 - \frac{2}{N}.$$

Soit $N \geq 2$ fixé. On pose :

$$X_N = \sum_{n=1}^N \frac{T_{n,N}}{3^n}.$$

On admet que X_N est une variable aléatoire discrète réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer que X_N admet une espérance et une variance et donner leur valeur en fonction de N .
2. Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(|X_N - E(X_N)| \geq \varepsilon) = 0.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$, démontrer que :

$$P(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \leq P(|X_N - E(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(|E(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}).$$

En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(|X_N - 1| \geq \varepsilon) = 0.$$

2016

1. Démontrer que la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) vérifie :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = P[(X = i) \cap (Y = j)] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

- (a) Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.
- (b) Démontrer que les variables X et Y suivent une même loi que l'on déterminera.
- (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice I.

1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer sa fonction génératrice, puis en déduire son espérance et sa variance.

Partie 4 du problème : Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0, 1]$.

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x \in [0, 1]$.

On pose : $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

1. S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

(a) Démontrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, $P(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$.

(b) Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x)$$

2. (a) Soit $\varepsilon > 0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple $(a, b) \in [0, 1]^2$,

$|a - b| \leq \alpha$ entraîne $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$, puis majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$, pour tout entier k

entre 0 et n vérifiant $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$.

(b) Justifier que $\left|\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbb{P}(S_n = k)\right| \leq 2\|f\|_{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$.

(c) Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n > n_0$ et tout réel $x \in [0, 1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| < 2\varepsilon$, puis conclure.