

CONCOURS COMMUN INP 2025

Épreuve de mathématiques I, MP, quatre heures
(corrigé)

EXERCICE I

Q 1. On note que $] -1, 1[$ est un intervalle, donc une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Comme une application continue préserve la connexité par arcs, et que f' est continue en tant que dérivée d'une fonction de classe C^1 , on conclut que $f'([-1, 1])$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$: d'où le résultat.

Q 2. a) La dérivabilité de f sur $] -1, 1[\setminus \{0\}$ ne pose pas de problème grâce aux théorèmes généraux sur les fonctions dérivables. En effet, $t \mapsto \frac{1}{t}$ est dérivable sur $]0, 1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et le cosinus et le sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$: par composition, $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ et $t \mapsto \cos\left(\frac{1}{t}\right)$, or $t \mapsto t^2$ l'est aussi. Par produit, chaque composante de f est dérivable sur $]0, 1[$ donc f l'est aussi. Le raisonnement est plus direct sur $] -1, 0[$ puisque la restriction de f y est identiquement nulle.

On a en outre, pour tout $t \in]0, 1[$:

$$f'(t) = \left(2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right), 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right).$$

Pour $t \in] -1, 0[$, la dérivée est bien sûr nulle.

Démontrons la dérivabilité en 0 composante par composante. Soit t strictement positif au voisinage de 0. On a :

$$\frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) - 0}{t - 0} = t \sin\left(\frac{1}{t}\right) = o_{t \rightarrow 0}(t) = o_{t \rightarrow 0}(1),$$

donc : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) - 0}{t - 0} = 0$. On trouve de même : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right) - 0}{t - 0} = 0$. La limite à gauche étant trivialement nulle aussi, on a démontré :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t) - f(0)) = (0, 0),$$

donc f est dérivable en 0 et : $f'(0) = (0, 0)$. Ainsi f est dérivable sur $] -1, 1[$.

b) Soit $t \in]0, 1[$. On a par l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} \|f'(t)\|_2^2 &= \left(2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2 + \left(2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right)^2 \\ &= \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) + \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) + (2t)^2 \left(\cos^2\left(\frac{1}{t}\right) + \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) \right) \\ &= 1 + (2t)^2 \\ &\geq 1, \end{aligned}$$

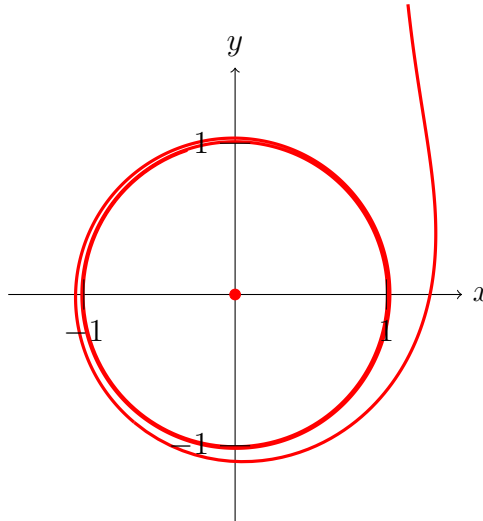
donc : $f'([0, 1]) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)$.

Déduisons-en que $f'([-1, 1])$ n'est pas connexe par arcs en raisonnant par l'absurde : supposons l'existence d'un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow f'([-1, 1])$ liant $f'(0) = (0, 0)$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)$. Par continuité de $\|\gamma\|_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – en effet toute norme est continue car lipschitzienne par l'inégalité triangulaire renversée – et le théorème des valeurs intermédiaires (avec $\|\gamma(0)\|_2 = \|(0, 0)\|_2 = 0$ et $\|\gamma(1)\|_2 = \left\|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right\|_2 \geq 1$), il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que : $\|\gamma(t_0)\|_2 = \frac{1}{2}$ (le réel $\frac{1}{2}$ n'a pas d'importance : ce peut être tout élément de $]0, 1[$). Or $\|\gamma(t_0)\|_2$

appartient à $\|f'\|_2(]-1, 1[)$, qui lui-même est inclus dans $\{0\} \cup [1, +\infty[$ d'après l'étude qui précède : il ne peut donc pas être égal à $\frac{1}{2}$: contradiction.

Par l'absurde, $f'([-1, 1])$ n'est pas connexe par arcs.

Remarque. Le sujet autorisait à prendre un dessin en appui. Représentons donc $\{(0, 0)\} = f'([-1, 0])$ et $f'([0, 1])$:



Il est manifeste que $\{(0, 0)\} = f'([-1, 0])$ et $f'([0, 1])$ forment deux composantes connexes distinctes : on ne peut pas passer continûment d'un vecteur « presque unitaire » au vecteur nul sans passer par toutes les normes intermédiaires. C'est ce que nous avons formalisé ci-dessus.

EXERCICE II

Q 3. Remarquons d'abord que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. On a en outre :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1 f(x, y) = -2(2 - x - y) - 2(1 - x) - 4(1 - 2x - y) = -4(5 - 6x - 3y),$$

et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2 f(x, y) = -2(2 - x - y) - 2(1 - 2x - y) = 2(3x + 2y - 3).$$

On en déduit que si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors (x, y) est un point critique de f si et seulement si :

$$\begin{cases} 6x + 3y = 5 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} -y = -1 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \iff (x, y) = \left(\frac{1}{3}, 1\right).$$

Le calcul de la matrice hessienne de f donne :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad H_f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\det \left(H_f \left(\frac{1}{3}, 1 \right) \right) = 2^2 (24 - 9) > 0, \quad \text{et} : \quad \text{tr} \left(H_f \left(\frac{1}{3}, 1 \right) \right) = 14 > 0.$$

On en déduit que la matrice hessienne de f en $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ est définie positive et donc que f admet un minimum local en ce point.

Comme l'énoncé demande d'admettre que ce minimum est global, on conclut :

$$\min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = f \left(\frac{1}{3}, 1 \right) = \frac{4}{3}.$$

Q 4. Remarquons avant tout que l'on a :

$$\min f = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \|a - xu - yv\|^2 = \min_{b' \in F} \|a - b'\|^2 = d(a, F) = \|a - b\|^2,$$

où b est le projeté orthogonal de a sur F . Il est l'unique vecteur à vérifier :

$$b \in F, \quad \text{et} : \quad a - b \in F^\perp.$$

La première condition signifie qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $b = xu + yv$. La seconde signifie que $a - b$ est orthogonal à tout vecteur de F et en particulier à u et v (qui engendrent F). D'où : $\langle a - b | u \rangle = \langle a - b | v \rangle = 0$. Or un calcul immédiat donne :

$$\langle a | u \rangle = 5, \quad \langle a | v \rangle = 3, \quad \langle u | u \rangle = 6, \quad \langle u | v \rangle = 3, \quad \langle v | v \rangle = 2.$$

Comme $b = xu + yv$, on en déduit :

$$\begin{cases} \langle a - b | u \rangle = 0 \\ \langle a - b | v \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x + 3y = 5 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} \iff (x, y) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

(c'est le même système à résoudre que par la première méthode). On a donc :

$$b = \frac{1}{3}u + v = \frac{1}{3}(4, 1, 5).$$

On en déduit, comme $a - b \in F^\perp$ et $b \in F$ sont orthogonaux :

$$\min f = \langle a - b | a \rangle - \underbrace{\langle a - b | b \rangle}_{=0} = \langle a | a \rangle - \frac{1}{3}\langle u | a \rangle - \langle v | a \rangle = 6 - \frac{5}{3} - 3 = \frac{4}{3}.$$

On trouve la même valeur que la première méthode (avec l'avantage qu'on n'admet rien cette fois-ci), ce qui est rassurant.

PROBLÈME

Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Partie I – Théorème de comparaison avec une intégrale

Q 5. Comme f est positive, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = f(n+1) \geq 0$, et : $J_{n+1} - J_n = \int_n^{n+1} f \geq 0$ (on utilise là la relation de Chasles et la croissance de l'intégrale). On en déduit que les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont croissantes.

Ensuite, par décroissance de f sur $[k-1, k]$, on a pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$f(k) = \int_{k-1}^k f(k) dt \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dt = f(k-1),$$

d'où le résultat : $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$. L'hypothèse de continuité intervient pour assurer la convergence de toutes ces intégrales sur des segments.

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On somme de $k = 1$ à $k = n$ l'encadrement de la question précédente et on utilise la relation de Chasles. On obtient :

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k),$$

d'où le résultat : $S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}$.

Q 7. Notons que f est bien continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, elle est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et minorée par 0 : elle admet donc une limite finie en $+\infty$. Nous nous en servons pour démontrer le second point de cette question.

Supposons f intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par positivité, on a pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$S_n \stackrel{(\text{Q 6})}{\leq} J_n + f(0) \leq \int_0^{+\infty} f + f(0) < +\infty.$$

Ainsi la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (**Q 5**) et majorée : elle converge, c'est-à-dire la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge.

Réciproquement, si la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge, alors par positivité de f (qui autorise les calculs dans $[0, +\infty]$) on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f| = \int_{\mathbb{R}_+} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n.$$

Par la question précédente et convergence de la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$, on a les inégalités suivantes en

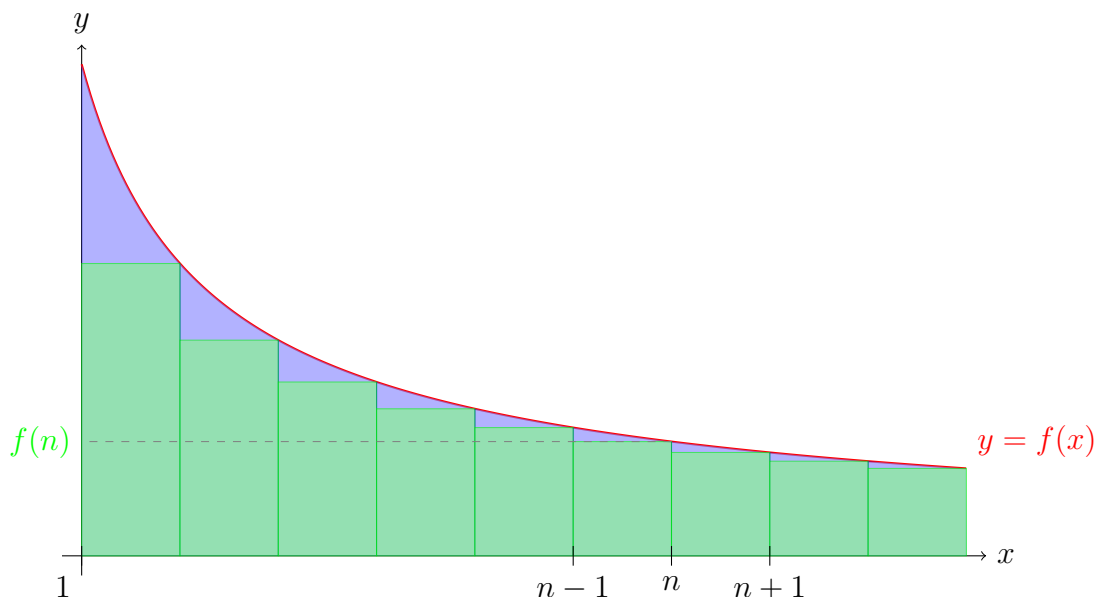
passant à la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(k) < +\infty$, donc : $\int_{\mathbb{R}_+} |f| < +\infty$, ce qui démontre l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$. Ceci achève de démontrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge.

Démontrons que la série $\sum_{n \geq 1} \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$ converge. Par la question **Q 5**, le terme général de cette série est positif, ce qui autorise le calcul suivant dans $[0, +\infty]$ (encore justifié par la question **Q 5**), qui fait apparaître une somme télescopique :

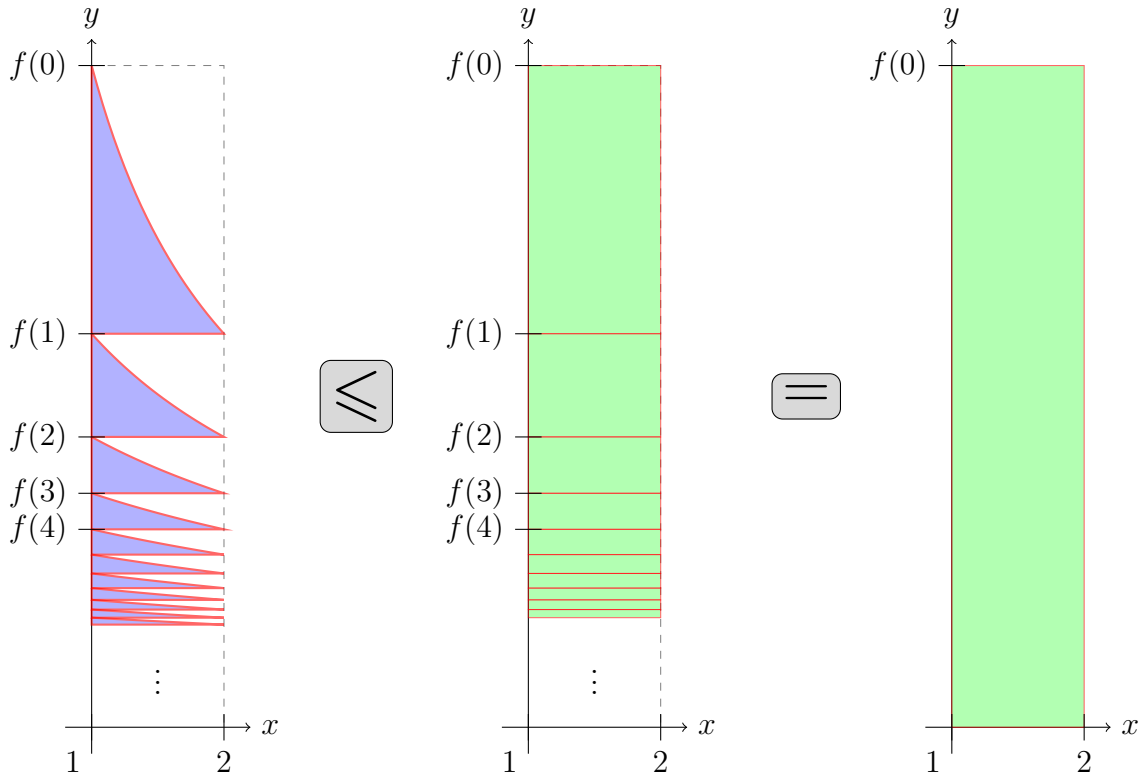
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n-1) - f(n)) = f(0) - \lim_{+\infty} f < +\infty,$$

donc la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$ converge : d'où le résultat.

Remarque. La convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$ est visuelle, et cette visualisation motive d'ailleurs les majorations ci-dessus. En effet, cette série représente la somme des aires bleues ci-dessous :



Si l'on « empile » ces aires, on voit immédiatement un majorant convenable :



Ainsi la somme des aires bleues définit une suite croissante majorée : elle converge. Le rectangle vert servant de majorant est la somme télescopique de la résolution.

- Q 8.** a) Comme $\alpha > 0$, la fonction f est décroissante en tant que produit des fonctions décroissantes et positives $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{(\ln(x))^\alpha}$. Elle est aussi continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. On a en outre, pour tout $x \geq 2$:

$$\int_2^x \frac{dt}{t \ln(t)} = [\ln(|\ln(t)|)]_2^x = \ln(|\ln(x)|) - \ln(\ln(2)),$$

tandis que, si $\alpha \neq 1$:

$$\forall x \geq 2, \quad \int_2^x \frac{dt}{t(\ln(t))^\alpha} = \left[-\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{(\ln(t))^{\alpha-1}} \right]_2^x = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(\ln(2))^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ln(x))^{\alpha-1}} \right).$$

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x f = \begin{cases} \frac{1}{(\alpha-1)(\ln(2))^{\alpha-1}} < +\infty & \text{si } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Comme f est positive, cela démontre qu'elle est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si : $\alpha > 1$.

Par la question précédente, dont toutes les hypothèses sont vérifiées (pour se ramener à $\mathbb{R}_+$, il suffit de considérer la fonction translatée $x \mapsto f(x+2)$, ce qui ne change rien à la nature des intégrales et séries en jeu), la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$.

- b) Si $\alpha = 2$, alors la question **Q 6** (où l'on considère encore la fonction translatée $x \mapsto f(x+2)$ pour se ramener à $\mathbb{R}_+$) donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \int_2^{n+1} \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(\ln(k))^2} \leq \int_2^n \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx + \frac{1}{2(\ln(2))^2},$$

et donc, quand $n \rightarrow +\infty$, par le calcul de la question précédente :

$$\frac{1}{\ln(2)} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln(k))^2} \leq \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{2(\ln(2))^2}.$$

Q 9. a) Pour tout n au voisinage de l'infini on a :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 - \sum_{k=2}^n \left(\int_{k-1}^k \frac{1}{x} - \frac{1}{k} \right).$$

En appliquant la question **Q 7** à la fonction continue, positive et décroissante $x \mapsto \frac{1}{x}$ (ou plutôt à sa translatée $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ qui vérifie les mêmes hypothèses sur $\mathbb{R}_+$), la série $\sum_{k \geq 2} \left(\int_{k-1}^k \frac{1}{x} - \frac{1}{k} \right)$ converge, ce qui démontre la convergence de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$. D'où le résultat.

b) Par la question précédente : $T_n = \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$, donc par définition de T_n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

Comme le logarithme tend vers l'infini, on en déduit :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + o_{n \rightarrow +\infty}(\ln(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

Q 10. a) On a dans $[0, +\infty[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|g_n\|_{\infty} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} |g_n(n)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} = +\infty,$$

car la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est à termes positifs et divergente. On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$.

b) Notons d'abord que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, puisque le dénominateur est continu et ne s'annule pas sur cet intervalle.

La fonction $t \mapsto t^2$ étant positive et croissante sur $\mathbb{R}_+$, les opérations élémentaires sur les inégalités impliquent que f est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc lui appliquer la question **Q 5**, d'où le résultat en sommant l'inégalité $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$ de $k = 0$ à $k = n$, puis en sommant l'inégalité $\int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$ de $k = 1$ à $k = n+1$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a :

$$\int_0^n f(t) dt = \int_0^n \frac{1}{x \left(\frac{t}{x} \right)^2 + 1} dt = \left[\arctan \left(\frac{t}{x} \right) \right]_0^n = \arctan \left(\frac{n}{x} \right)$$

et de même :

$$\int_1^{n+1} f(t) dt = \arctan \left(\frac{n+1}{x} \right) - \arctan \left(\frac{1}{x} \right).$$

Comme x est strictement positif, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{x} = +\infty$, donc par composition de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(t) dt = \frac{\pi}{2}, \quad \text{et :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} f(t) dt = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

On passe à la limite dans l'encadrement de la question précédente. Notons que la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de $\sum_{k=1}^n f(k)$ existe bien (dans $[0, +\infty]$ *a priori*) puisque nous sommes des termes positifs. Comme $f(k) = g_k(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on en déduit :

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leq \frac{\pi}{2},$$

d'où le résultat, pour tout $x > 0$. Ceci démontre en passant la convergence simple de la série de fonctions positives $\sum_{n \geq 1} g_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Par la question précédente et le théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$. En effet, dans le cas contraire, comme on a aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \lim_{+\infty} g_n = 0,$$

par le théorème de la double limite on aurait :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0,$$

ce qui contredit le calcul de limite effectué ci-dessus. D'où le résultat par l'absurde.

Remarque. Ceci conforte l'absence de convergence normale, déjà constatée à la question a).

Partie II – Contre-exemples

Q 11. a) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Notons que le sinus est positif sur $[0, \pi]$ et négatif sur $[\pi, 2\pi]$. Par périodicité, $x \mapsto \sin(2\pi x)$ est positive sur $[n, n + \frac{1}{2}]$ et négative sur $[n + \frac{1}{2}, n + 1]$. On a alors, par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} f &= \int_n^{n+\frac{1}{2}} f + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f \\ &= \int_n^{n+\frac{1}{2}} \sin(2\pi x) dx - \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \sin(2\pi x) dx \\ &= \left[-\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi} \right]_n^{n+\frac{1}{2}} - \left[-\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi} \right]_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ &= -\frac{\cos(2\pi n + \pi)}{2\pi} + \frac{\cos(2\pi n)}{2\pi} - \left(-\frac{\cos(2\pi(n+1))}{2\pi} + \frac{\cos(2\pi n + \pi)}{2\pi} \right) \\ &= -\frac{-1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} - \left(-\frac{1}{2\pi} + \frac{-1}{2\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

b) Soit $x \in [1, +\infty[$. Par positivité de l'intégrande, on a :

$$\int_1^x |\sin(2\pi t)| dt \geq \int_1^{\lfloor x \rfloor} |\sin(2\pi t)| dt = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_n^{n+1} |\sin(2\pi t)| dt \stackrel{(a)}{=} \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} (\lfloor x \rfloor - 1),$$

ce qui donne la minoration attendue. Comme le minorant tend vers l'infini, on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = +\infty,$$

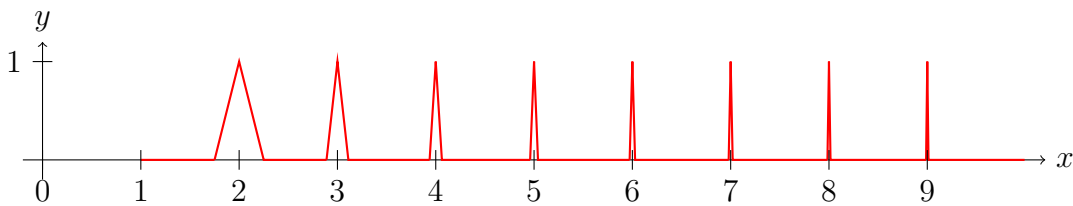
donc f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Or le sinus est nul en tous les multiples entiers de π , donc la série $\sum_{n \geq 1} f(n) = \sum_{n \geq 1} 0$ est

trivialement convergente : elle n'est pas de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$. C'est bien sûr la monotonie de f qui ne permet pas d'appliquer la question **Q 7**.

Q 12. Il suffit de prendre $a_n = \frac{1}{n^2}$. La longueur de $[n - a_n, n + a_n]$ est alors égale à $\frac{2}{n^2}$, or l'aire du triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1 est égale à la longueur de la base fois la hauteur divisée par 2 : son aire est bien égale à $\frac{1}{n^2}$.

Voici le graphe de la fonction décrite par l'énoncé. Du moins, nous ne respectons la description que pour $n \geq 2$, car les intervalles $[1 - a_1, 1 + a_1]$ et $[2 - a_2, 2 + a_2]$ ne sont pas disjoints (on a $1 + a_1 = 2$) : nous posons la fonction comme étant nulle sur $[1, 2 - a_2]$. Ceci étant dit :



Cette fonction est continue et positive. On a dans $[0, +\infty[$:

$$\int_1^{+\infty} f = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-a_n}^{n+a_n} f = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

puisque l'on reconnaît une série de Riemann d'exposant strictement supérieur à 1. Pourtant, toujours dans $[0, +\infty[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{+\infty} 1 = +\infty,$$

donc la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ n'ont pas la même nature. C'est bien sûr la monotonie de f qui est encore mise en défaut.