

## Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

**Q1.**  $((X_0 = 1), (X_0 = 2))$  forme un système complet d'événements de probabilités non nulles

La formule des probabilités totales nous donne :

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)P(X_0 = 1) + P(X_1 = 1 \mid X_0 = 2)P(X_0 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{de même : } P(X_1 = 2) = P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1)P(X_0 = 1) + P(X_1 = 2 \mid X_0 = 2)P(X_0 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$$

La loi de  $X_1$  est donnée par  $P(X_1 = 1) = \frac{3}{8}$  et  $P(X_1 = 2) = \frac{5}{8}$

**Q2.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . De même qu'à la question précédente, avec la formule des probabilités totales on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1)P(X_n = 1) + P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2)P(X_n = 2)$$

$$\text{et } P(X_{n+1} = 2) = P(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1)P(X_n = 1) + P(X_{n+1} = 2 \mid X_n = 2)P(X_n = 2)$$

ce qui peut s'écrire :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{4}P(X_n = 2) \text{ et } P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{3}{4}P(X_n = 2)$$

ce qui s'écrit matriciellement :  $\mu_{n+1} = \mu_n A$  avec  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

**Q3.** À l'aide de la calculatrice, La loi de  $X_5$  est donnée par  $P(X_5 = 1) \approx 0,33$  et  $P(X_5 = 2) \approx 0,67$

**Q4. Méthode 1** Pour  $i \in \{1, 2\}$ , on note  $P_i$  la probabilité conditionnelle  $P_{(X_0=i)}$

On a clairement  $P_1(T = 0) = 1$  et  $P_2(T = 0) = 0$  et pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_1(T = k) = 0$

En supposant  $(X_0 = 2)$  ; jusqu'au premier  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $X_k = 1$ , on a une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $\frac{1}{4}$ , le succès étant "passer de l'état 2 à l'état 1".

*Cette modélisation cache le manque de rigueur de la méthode 2 et de sa variante !*

Ainsi pour  $P_2$ ,  $T$  suit une loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{4}$  et donc  $P_2(T = k) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

La formule des probabilités totales s'écrit pour  $k \in \mathbb{N}$  :  $P(T = k) = \frac{1}{2} (P_1(T = k) + P_2(T = k))$

Ainsi La loi de  $T$  est alors donnée par :  $P(T = 0) = \frac{1}{2}$  et pour  $k > 0$ ,  $P(T = k) = \frac{3^{k-1}}{2 \cdot 4^k}$

**Méthode 2 moins rigoureuse** Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

Si  $k = 0$ , alors  $P(T = 0) = P(X_0 = 1) = \frac{1}{2}$

si  $k > 0$ , alors  $(T = k) = (X_k = 1) \cap \bigcap_{i=0}^{k-1} (X_i = 2)$

En utilisant la formule des probabilités composées, on obtient :

$$P(T = k) = P\left((X_k = 1) \mid \bigcap_{i=0}^{k-1} (X_i = 2)\right) \times \prod_{i=0}^{k-1} P\left((X_i = 2) \mid \bigcap_{j=0}^{i-1} (X_j = 2)\right)$$

avec la convention (pour  $i = 0$ ),  $P\left((X_0 = 2) \mid \bigcap_{j=0}^{0-1} (X_j = 2)\right) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$

et pour  $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ ,  $P \left( (X_i = 2) \mid \bigcap_{j=0}^{i-1} (X_j = 2) \right) = P((X_i = 2) \mid (X_{i-1} = 2)) = \frac{3}{4}$

C'est **peu rigoureux**, on a utilisé l'énoncé :

« la particule au temps  $n+1$  dépend uniquement de son état au temps  $n$  »

De même,  $P \left( (X_k = 1) \mid \bigcap_{i=0}^{k-1} (X_i = 2) \right) = \frac{1}{4}$

On trouve alors  $P(T = k) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \right)^{k-1} \frac{1}{4}$

La loi de  $T$  est alors donnée par :  $P(T = 0) = \frac{1}{2}$  et pour  $k > 0$ ,  $P(T = k) = \frac{3^{k-1}}{2 \cdot 4^k}$

**Méthode 2 variante** On pourrait utiliser :  $P_{(T \geq n)}(T > n) = P_{(X_n = 2)}(X_{n+1} = 2)$  de façon non rigoureuse.

Pour en déduire que  $(P(T \geq n))_{n \geq 1}$  est une suite géométrique de raison  $3/4$ .

On peut conclure en utilisant :

$P(T = n) = P(T \geq n) - P(T > n)$  et  $1 - P(T \geq 1) = P(T = 0) = P(X_0 = 1) = 1/2$  et  $P(T \geq 0) = 1$ .

**Q5.** On a  $\chi_A = X^2 - (A)X + \det(A) = X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{1}{4} = (X - 1) \left( X - \frac{1}{4} \right)$

Comme  $\chi_A$  est scindé à racines simples ; la matrices  $A$  est diagonalisable

En prenant  $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  on a bien  $A = Q \operatorname{diag} \left( 1, \frac{1}{4} \right) Q^{-1}$

**Q6.** Les applications  $M \mapsto QMQ^{-1}$  et  $M \mapsto \mu_0 M$  définies sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  sont continues

car linéaire d'espace de départ  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui est de dimension finie.

**Q7.** On rappelle que les notions topologiques (en particulier convergence d'une suite) sont indépendantes du choix de la norme en dimension finie.

Par récurrence immédiate :  $A^n = Q \operatorname{diag} \left( 1, \frac{1}{4^n} \right) Q^{-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}$

En utilisant la caractérisation de la limite d'une suite de matrices selon les suites des coefficients,

on a  $\operatorname{diag} \left( 1, \frac{1}{4^n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \operatorname{diag}(1, 0)$

en utilisant la continuité de l'application  $M \mapsto QMQ^{-1}$ , on obtient

la convergence de la suite de matrices  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $Q \operatorname{diag} \left( 1, \frac{1}{4} \right) Q^{-1}$

avec la continuité de  $M \mapsto \mu_0 M$  : la suite des vecteurs lignes  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mu_0 Q \operatorname{diag}(1, 0) Q^{-1}$

On a  $Q \operatorname{diag}(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  donc  $\mu_0 Q \operatorname{diag}(1, 0) = (1 \ 0)$

On trouve  $Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  en utilisant  $Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)} {}^t(\operatorname{com} Q)$

donc  $\mu_0 Q \operatorname{diag}(1, 0) Q^{-1} = \frac{1}{3} (1 \ 2)$

donc le vecteur ligne obtenu comme limite est  $(1/3 \ 2/3)$

## Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

**Q8.** On écrit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et on a  $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j} \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  ainsi 1 est bien valeur propre de A

**Q9.** On écrit  $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$  et on considère  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tel que  $|x_k| = \|x\|_\infty$

Soit  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On a  $\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_k| = |x_k|$

comme c'est vrai pour tout  $i$ , on conclut que  $\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$

**Q10.** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de A et  $x$  un vecteur colonne propre associé.

On a  $\|Ax\|_\infty = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty$  or  $\|x\|_\infty > 0$

En utilisant la question précédente, on conclut que :  $|\lambda| \leq 1$

## Localisation des valeurs propres

**Q11.** Soit un vecteur colonne propre  $y = (y_1, \dots, y_p)$  de  $\mathbb{C}^p$  tel que  $Ay = \lambda y$

comme  $y \neq 0$ , on peut prendre  $x = \frac{1}{\|y\|_\infty} y$  de sorte que  $\|x\|_\infty = 1$  et  $Ax = \lambda x$

**Q12.** On a  $\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$

donc  $|\lambda - a_{i,i}| = |(\lambda - a_{i,i})x_i| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} |x_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} = -a_{i,i} + \sum_{j=1}^n a_{i,j}$

On a démontré que :  $|\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}$

## Étude d'un exemple

**Q13.** On vérifie facilement que A est une matrice stochastique (signe des coefficients et sommes par ligne).

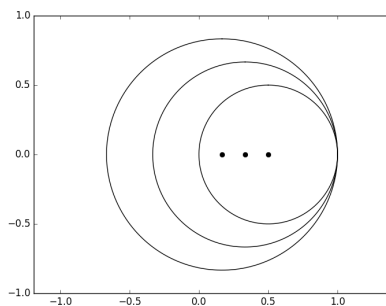
On considère  $\lambda$  une valeur propre complexe de A

**Q11** nous fournit  $x \in \mathbb{C}^3$  vecteur colonne tel que  $\|x\|_\infty = 1$  et  $Ax = \lambda x$

**Q12** nous fournit  $i \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $|\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}$

donc  $\lambda$  est dans la réunion des disques fermés de centres  $a_{i,i}$ , de rayon  $1 - a_{i,i}$  avec  $1 \leq i \leq p$

le spectre de A est inclus dans la réunion de trois disques de centres :  $1/2, 1/6, 1/3$  et de rayons  $1/2, 5/6, 2/3$



**Cas des matrices stochastiques strictement positives**

**Q14.** Par l'absurde, on suppose que  $B'$  n'est pas inversible alors 0 serait valeur propre de  $B'$ .

L'inégalité admise nous fournit  $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$  tel que  $|a_{i,i} - 1| \leq 1 - a_{i,i} - a_{i,p}$

Comme  $A$  est strictement positive et stochastique, on a  $0 < a_{i,j} < 1$  pour tout  $1 \leq j \leq p$

donc  $1 - a_{i,i} = |a_{i,i} - 1| \leq 1 - a_{i,i} - a_{i,p}$  d'où  $0 < a_{i,p} \leq 0$  ce qui est absurde

Ainsi  $B'$  est inversible

**Q15.** On suppose par l'absurde que  $\dim \text{Ker}(A - I_p) \neq 1$

Comme 1 est valeur propre de  $A$ , on a  $\dim \text{Ker}(A - I_p) \neq 0$ ,

On en déduit que  $\dim \text{Ker } B = \dim \text{Ker}(A - I_p) \geq 2$

On en déduit que  $\text{rg } B \leq p - 2$  car d'après le théorème du rang  $\text{rg } B + \dim \text{Ker } B = p$

donc les  $p - 1$  premières colonnes de  $B$  ont un rang inférieur à  $p - 2$

donc  $\text{rg}(B') \leq p - 2$

donc  $B'$  n'est pas inversible ce qui n'est pas d'après la question précédente.

On en déduit que  $\dim \text{Ker}(A - I_p) = 1$

**Partie III - Itérées d'une matrice stochastique****Un contre-exemple**

**Q16.** La matrice  $B$  de  $s$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Q17.** Les suites extraites de matrices  $(B^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(B^{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont constantes ;

elles convergent dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  de limites respectives  $I_2$  et  $B$  or  $I_2 \neq B$

on en déduit que la suite matricielle  $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

alors que  $B$  est stochastique mais non strictement positive

La **Proposition 2** ne reste pas vraie en général si la matrice stochastique n'est pas strictement positive

Pour  $p > 2$ , il suffit de prendre comme contre-exemple :  $\text{diag}(B, 1, \dots, 1)$

**Résultat préliminaire**

**Q18.** Comme  $N$  est nilpotente,  $N$  admet 0 comme unique valeur propre.

Donc le polynôme caractéristique (scindé dans  $\mathbb{C}[X]$ ) est  $\chi_N = X^p$

En appliquant Cayley-Hamilton, on a  $N^p = 0$

**Q19.** Pour  $n \geq k$ , on a  $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$

Si  $k \geq 1$ , le numérateur étant un produit de  $k$  facteurs tous équivalents à  $n$  ;

on en déduit que  $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$  facilement vérifiable pour  $k = 0$ .

donc si  $\lambda \neq 0$ , par croissance comparée car  $0 < |\lambda| < 1$  :

$$\left| \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k |\lambda|^n}{k! |\lambda|^k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

on en déduit (valable même si  $\lambda = 0$ ) que  $\binom{n}{k} \lambda^{n-k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$

**Q20.** Pour  $n \geq p$ , on a :  $(\lambda I_p + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k$  d'après Newton car  $\lambda I_p$  et  $N$  commutent

d'après la question 18, on a  $(\lambda I_p + N)^n = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k$

pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , la suite  $\left(\binom{n}{k} \lambda^{n-k}\right)_{n \geq p}$  converge vers 0 d'après la question 19

On en déduit par combinaison linéaires (à  $p$  termes) que

la suite de matrices  $((\lambda I_p + N)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice nulle

### Convergence d'une suite de matrice

**Q21.** Je me sers de **Q18** et **Q19** en **Q20** seule question parmi 18,19,20 que j'utilise ici.

Le théorème de cours gentiment rappelé par l'énoncé et la **proposition 1** nous fournissent  $r \in \mathbb{N}^*$ , des complexes  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  distincts deux à deux et de  $1, N_1, \dots, N_r$  des matrices nilpotentes à coefficients complexes et  $Q \in GL_p(\mathbb{C})$  tels que

$$A = Q \text{diag}(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_r I_{p_r} + N_r) Q^{-1}$$

donc  $A^n = Q \text{diag}(1, (\lambda_1 I_{p_1} + N_1)^n, \dots, (\lambda_r I_{p_r} + N_r)^n) Q^{-1}$  par récurrence immédiate

En utilisant **Q20**,

on obtient que pour  $i \in \llbracket 2, r \rrbracket$ , la suite de matrices blocs  $((\lambda_i I_{p_i} + N_i)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers la matrice nulle donc en utilisant la caractérisation par la limite par les coefficients

$(\text{diag}(1, (\lambda_1 I_{p_1} + N_1)^n, \dots, (\lambda_r I_{p_r} + N_r)^n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\text{diag}(1, 0_{\mathcal{M}_{p-1}})$

En utilisant la continuité de  $M \mapsto QMQ^{-1}$  (comme en Q6 et Q7), la suite  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge

### Partie IV - Probabilité invariante par une matrice stochastique

**Q22.** Soit  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} = ((x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs stochastiques de  $\mathbb{R}^n$  qui converge vers le vecteur  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Montrons que  $y$  est stochastique.

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la suite de scalaire  $(x_i^{(k)})$  converge vers  $y_i$ .

comme  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_i^{(k)} \geq 0$ , on a  $y_i \geq 0$  par passage à la limite

et comme  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^{(k)} = 1$ , on a  $\sum_{i=1}^n y_i = 1$  par passage à la limite

ainsi  $y$  est un vecteur stochastique de  $\mathbb{R}^n$ .

On a démontré par la caractérisation séquentielle que

l'ensemble des vecteurs stochastiques de  $\mathbb{R}^n$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^n$

### Convergence de la suite

**Q23.** Par récurrence immédiate, on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_n = \mu_0 A^n$

La suite  $(A^n)$  converge vers une matrice  $L$  d'après **Q21** et comme en **Q6**, l'application  $M \mapsto \mu_0 M$  est continue ainsi comme en **Q7**,  $(\mu_n)$  converge une limite  $\mu_\infty = \mu_0 L \in \mathbb{R}^p$ .

Comme l'application linéaire  $x \in \mathbb{R}^p \mapsto xA$  est continue par dimension finie au départ,

la suite  $(\mu_n A)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mu_\infty A$

et la suite extraite  $(\mu_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mu_\infty$

de plus pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_{n+1} = \mu_n A$ ,

d'où  $\mu_\infty = \mu_\infty A$  par unicité de la limite

On a démontré que la suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un vecteur  $\mu_\infty$  vérifiant  $\mu_\infty = \mu_\infty A$

**Q24.** On écrit  $\mu A = (m'_1, \dots, m'_p)$  et  $A = (a_{i,j})$

On a pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $m'_i = \sum_{k=1}^p m_k a_{k,i} \geq 0$  par somme et produits de réels positifs car  $\mu$  est stochastique

$$\text{et } \sum_{i=1}^p m'_i = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^p m_k a_{k,i} = \sum_{k=1}^p m_k \left( \sum_{i=1}^p a_{k,i} \right) = \sum_{k=1}^p m_k = 1 \text{ car } A \text{ et } \mu \text{ sont stochastiques}$$

ainsi  $\mu A$  est encore un vecteur stochastique

**Q25.** On a  $\mu_0$  est un vecteur ligne stochastique (initialisation) et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_{n+1} = \mu_n A$  (hérédité)

Alors par récurrence immédiate, pour tout  $n$ ,  $\mu_n$  est un vecteur ligne stochastique.

La suite  $(\mu_n)$  converge vers  $\mu_\infty$ , de plus selon **Q22**, l'ensemble des vecteurs stochastiques est une partie fermée donc  $\mu_\infty$  est un vecteur ligne stochastique de  $\mathbb{R}^p$  vérifiant  $\mu_\infty = A \mu_\infty$  selon **Q23**

On en déduit que  $\mu_\infty$  est une probabilité invariante par  $A$

### Unicité de la probabilité invariante

**Q26.** Comme  $\mu \in \mathbb{R}^p$  un vecteur ligne stochastique, on a

$\mu$  est une probabilité invariante de  $A$  si et seulement si  $\mu A = \mu$

ce qui équivaut à  ${}^t(\mu A) = {}^t\mu$  par bijectivité de la transposition

ce qui est équivalent à  $1 \cdot {}^t\mu = {}^tA {}^t\mu$

${}^t\mu$  étant non nul, on a :  $\mu$  est une probabilité invariante pour  $A$ , si et seulement si le vecteur colonne  ${}^t\mu$  est un vecteur colonne propre de  ${}^tA$  associé à la valeur propre 1

**Q27.** En utilisant deux fois le théorème du rang, l'égalité du rang d'une matrice et de sa transposée et la question **Q15**, on a :

$$\dim \text{Ker} ({}^tA - I_p) = p - \text{rg} ({}^t(A - I_p)) = p - \text{rg} (A - I_p) = \dim \text{Ker} (A - I_p) = 1$$

Ce qui justifie :  $\dim \text{Ker} ({}^tA - I_p) = 1$

**Q28.** On suppose  $A$  admet  $\mu = (m_1, \dots, m_p)$  et  $\mu' = (m'_1, \dots, m'_p)$  comme probabilité invariante

alors  ${}^t\mu$  et  ${}^t(\mu')$  sont des vecteurs colonnes propres de  ${}^tA$  associés à la valeurs propre 1

comme  $\dim E_1 ({}^tA) = \dim \text{Ker} ({}^tA - I_p) = 1$ , les vecteurs  ${}^t\mu$  et  ${}^t(\mu')$  sont colinéaires

ce qui nous fournit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tel que  $\lambda {}^t\mu = {}^t(\mu')$  car  $\mu$  est non nul car la somme des ses coefficients vaut 1

d'où  $\lambda \mu = \mu'$  et ainsi  $(\lambda m_1, \dots, \lambda m_p) = (m'_1, \dots, m'_p)$

de plus comme  $\mu$  et  $\mu'$  sont des vecteurs lignes stochastiques, on a  $1 = \sum_{i=1}^p m'_i = \lambda \sum_{i=1}^p m_i = \lambda$

donc  $\mu = \mu'$

On vient d'établir l'unicité et l'existence a été établie en **Q25**

On en déduit que  $A$  admet une unique probabilité invariante

## Partie V - Informatique : calcul effectif de la probabilité invariante d'une matrice stochastique strictement positive

**Q29.** Les valeurs respectives renvoyées lorsque l'on exécute `len(A)`, `A[1]` et `A[2][1]` sont 4 ; [4, 5, 6] et 8

**Q30.** Une fonction `difference` :

```
def difference(x,y):
    res = []
    p=len(x)
    for i in range(p):
        res.append(x[i]-y[i])
    return res
```

**Q31.** Une fonction `norme` :

```
def norme(x):
    m=abs(x[0])
    p=len(x)
    for i in range(1,p):
        if abs(x[i])>m:
            m=abs(x[i])
    return m
```

**Q32.** Une fonction `itere` :

```
def itere(x,A):
    p=len(x)
    res=[]
    for j in range(p):
        coef=0
        for i in range(p):
            coef+=x[i]*A[i][j]
        res.append(coef)
    return res
```

**Q33.** Une fonction `probaInvariante` :

```
def probaInvariante(A,eps):
    p=len(A)
    u=[1/p for i in range(p)]
    v=itere(u,A)
    while norme(difference(v,u))>eps:
        u=list(v)# on fait une copie de liste
        v=itere(v,A)
    return v
```