

UN CORRIGÉ du SUJET MINES-PONTS, MATH-2-MP, 2022

Partie A. Questions préliminaires.

1. Si $AB = BA$, alors par une récurrence immédiate, on a $AB^k = B^k A$ pour tout k entier naturel puis, par combinaisons linéaires, $A \cdot Q(B) = Q(B) \cdot A$ pour tout polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$. En particulier, pour tout k entier naturel,

$$A \cdot \left(\sum_{j=0}^k \frac{B^j}{j!} \right) = \left(\sum_{j=0}^k \frac{B^j}{j!} \right) \cdot A.$$

En faisant tendre k vers l'infini, par continuité du produit matriciel, il vient $A \cdot e^B = e^B \cdot A$.

2. Par dérivation d'un produit (justifié car le produit matriciel est bilinéaire), on obtient

$$g'(t) = (A + B) \cdot e^{t(A+B)} e^{-tB} - e^{t(A+B)} \cdot B \cdot e^{-tB}.$$

Mais, si A et B commutent, alors B et $t(A+B)$ commutent pour tout t , donc B et $e^{t(A+B)}$ commutent d'après **Q1**. Finalement,

$$g'(t) = (A + B) \cdot e^{t(A+B)} e^{-tB} - B \cdot e^{t(A+B)} e^{-tB} = A \cdot g(t).$$

D'autre part, $f'_A(t) = A \cdot f_A(t)$. Comme $f_A(0) = g(0) = I_n$, les fonctions f_A et g sont solutions du même problème de Cauchy **(P)**: $\begin{cases} M'(t) = A M(t) \\ M(0) = I_n \end{cases}$. Notons que l'équation

différentielle $M'(t) = A M(t)$, où la fonction inconnue est $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de classe $\mathcal{C}^1$, peut s'écrire sous la forme $M'(t) = \alpha(M(t))$, où α est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\alpha(M) = AM$. Il s'agit donc bien d'un problème de Cauchy dans les termes du programme MP. Par unicité de la solution d'un tel problème de Cauchy, on déduit que $g = f_A$. En particulier, dans le cas où $A = 0_n$, on obtient $e^{tB} e^{-tB} = I_n$, ce qui montre que la matrice e^{tB} est inversible, d'inverse e^{-tB} . On en déduit immédiatement la relation **(1)** de l'énoncé.

3. Supposons la relation **(1)** satisfaite. Les deux membres sont évidemment des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de la variable t . Une première dérivation donne par exemple

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (A + B) e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot A \cdot e^{tB} + e^{tA} \cdot B \cdot e^{tB} = e^{tA} (A + B) e^{tB}.$$

Une deuxième dérivation fournit

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (A + B)^2 e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot A(A + B) e^{tB} + e^{tA} (A + B) B \cdot e^{tB} = e^{tA} (A^2 + 2AB + B^2) e^{tB}.$$

En évaluant pour $t = 0$, on obtient $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, ce qui se simplifie en $BA = AB$.

4. Des propriétés **(N1)** et **(N2)** de la norme $\|\cdot\|$, on déduit d'abord par récurrence que $\|A^j\| \leq \|A\|^j$ pour tout j entier naturel. Puis, pour tout k entier naturel, par inégalité triangulaire et homogénéité de la norme, on a

$$\left\| \sum_{j=0}^k \frac{A^j}{j!} \right\| \leq \sum_{j=0}^k \frac{\|A^j\|}{j!} \leq \sum_{j=0}^k \frac{\|A\|^j}{j!}$$

Par continuité de la norme (qui est 1-lipschitzienne), en faisant tendre k vers l'infini dans l'inégalité entre les deux termes extrêmes, on obtient $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

5. Sur $\mathbb{C}$ au moins, la matrice A est trigonalisable: il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T , qui sont alors les valeurs propres de A . On a $\text{tr}(A) = \text{tr}(T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Un

calcul classique montre que, pour tout k entier naturel, la matrice T^k est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$. Puis, par combinaisons linéaires, pour tout

polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$, la matrice $Q(T)$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)$. Cela vaut en particulier si $Q = Q_k = \sum_{j=0}^k \frac{X^j}{j!}$. Enfin,

$$e^T = \lim_{k \rightarrow +\infty} Q_k(T) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} Q_k(\lambda_1) & & (\times) \\ & \ddots & \\ (0) & & Q_k(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (\times) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

donc $\det(e^T) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = e^{\text{tr}(A)}$. Enfin, e^A est semblable à e^T (*rappelé dans les préliminaires*), donc elle a le même déterminant.

Partie B. La formule de Trotter-Kato.

6. De la propriété **(N2)** de la norme $\|\cdot\|$ et de **Q4.**, on déduit

$$\|X_k\| \leq \left\| \exp\left(\frac{A}{k}\right) \right\| \left\| \exp\left(\frac{B}{k}\right) \right\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|}{k}\right) \exp\left(\frac{\|B\|}{k}\right) = \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right),$$

et, par inégalité triangulaire et croissance de la fonction exponentielle,

$$\|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A+B\|}{k}\right) \leq \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right).$$

7. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ par théorèmes classiques d'opérations, et on calcule

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h'(t) = e^{tA} (A+B) e^{tB} - (A+B) e^{t(A+B)}.$$

On observe notamment que $h(0) = 0_n$ et $h'(0) = 0_n$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour les fonctions vectorielles donne alors le développement

$$h(t) = 0_n + t \, 0_n + \frac{t^2}{2} h''(0) + o(t^2),$$

dont nous retiendrons seulement que

$$h(t) = O(t^2) \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0.$$

Il en résulte que

$$X_k - Y_k = h\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{lorsque } k \rightarrow +\infty.$$

8. On reconnaît une somme télescopique:

$$\sum_{i=0}^{k-1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1} = \sum_{i=0}^{k-1} (X_k^{i+1} Y_k^{k-(i+1)} - X_k^i Y_k^{k-i}) = X_k^k - Y_k^k.$$

La question **Q7.** nous apprend qu'il existe un réel strictement positif C tel que, pour k entier naturel assez grand, on ait $\|X_k - Y_k\| \leq \frac{C}{k^2}$. À l'aide des propriétés de la norme $\|\cdot\|$, on majore:

$$\|X_k^k - Y_k^k\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1}\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|X_k\|^i \|X_k - Y_k\| \|Y_k\|^{k-i-1} = \|X_k - Y_k\| \sum_{i=0}^{k-1} \|X_k\|^i \|Y_k\|^{k-i-1}.$$

Par ailleurs, grâce à **Q6.**,

$$\|X_k\|^i \|Y_k\|^{k-i-1} \leq \left[\exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right) \right]^i \left[\exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right) \right]^{k-i-1} = \exp\left((k-1) \frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)$$

donc $\|X_k\|^i \|Y_k\|^{k-i-1} \leq \exp(\|A\| + \|B\|)$. Comme la somme comporte k termes, on aboutit donc à

$$\|X_k^k - Y_k^k\| \leq k \cdot \exp(\|A\| + \|B\|) \cdot \frac{C}{k^2},$$

il en résulte que $\lim_{k \rightarrow +\infty} (X_k^k - Y_k^k) = 0$. Comme (Y_k^k) est une suite constante de valeur e^{A+B} , on conclut que $\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k^k = e^{A+B}$, ce qu'il fallait démontrer.

Partie C. Vers les algèbres de Lie.

9. Les matrices considérées ici sont à coefficients réels. Pour de telles matrices, la trace est réelle, donc pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $G = \text{SL}_n(\mathbb{R})$, on a d'après **Q5.**,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{A}_G &\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad \det(e^{tM}) = 1 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad e^{\text{tr}(tM)} = 1 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad t \text{tr}(M) = 0 \\ &\iff \text{tr}(M) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{A}_G = \text{Ker}(\text{tr})$, c'est l'hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de trace nulle.

10. Notons d'abord que, pour toute matrice A , on a $(e^A)^T = e^{A^T}$: pour le prouver, on procède comme dans **Q1.** et **Q5.**, i.e. on prouve que $(A^k)^T = (A^T)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis que $(Q(A))^T = Q(A^T)$ pour tout polynôme Q , puis on passe à la limite en considérant la suite de polynômes (Q_k) introduite dans le corrigé de **Q5.**

Donc si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a $A^T = -A$ donc $(e^{tA})^T e^{tA} = e^{tA^T} e^{tA} = e^{-tA} e^{tA} = e^{0_n} = I_n$ puisque tA et $-tA$ commutent. La matrice e^{tA} est donc orthogonale pour tout t réel. On a ainsi prouvé l'inclusion $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_G$.

Réciproquement, si $A \in \mathcal{A}_G$, pour tout t réel, on a $e^{tA} \in \text{O}_n(\mathbb{R})$, donc $(e^{tA})^T e^{tA} = I_n$, soit $e^{tA^T} = (e^{tA})^{-1}$, soit $e^{tA^T} = e^{-tA}$. En dérivant, on obtient $\forall t \in \mathbb{R} \quad A^T e^{tA^T} = -A e^{-tA}$, enfin en évaluant pour $t = 0$, il vient $A^T = -A$, donc $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a ainsi prouvé l'inclusion réciproque.

11. Comme $I_n \in G$, on déduit $0_n \in \mathcal{A}_G$. La stabilité par multiplication par un scalaire (réel) est immédiate: si $M \in \mathcal{A}_G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout t réel, $e^{t(\lambda M)} = e^{(\lambda t)M} \in G$, donc $\lambda M \in \mathcal{A}_G$. Enfin, la stabilité par addition résulte de la **Partie 2.** En effet, soient $A \in \mathcal{A}_G$ et $B \in \mathcal{A}_G$, alors pour tout k entier naturel non nul et pour tout t réel, les matrices

$\exp\left(\frac{tA}{k}\right)$ et $\exp\left(\frac{tB}{k}\right)$ appartiennent à G ; de la structure de groupe de G , on déduit que $\left(\exp\left(\frac{tA}{k}\right) \exp\left(\frac{tB}{k}\right)\right)^k \in G$. Enfin, G est fermé donc “stable par passage à la limite”, on déduit donc de la relation **(2)** démontrée en **Q8**. que $e^{t(A+B)} \in G$. Ceci étant vrai pour tout t réel, on a prouvé que $A+B \in \mathcal{A}_G$.

12. Soient t et s réels. Alors, d’après la propriété rappelée en préambule, on a

$$e^{s u(t)} = \exp\left(e^{tA} (sB) (e^{tA})^{-1}\right) = e^{tA} e^{sB} e^{-tA}.$$

Les trois matrices de ce produit appartiennent à G , donc $\forall s \in \mathbb{R} \quad e^{s u(t)} \in G$, ce qui prouve que $u(t) \in \mathcal{A}_G$.

13. L’application u introduite en **Q12**. est dérivable et $u'(t) = e^{tA} [A, B] e^{-tA}$. En particulier, $u'(0) = [A, B]$. Comme u est à valeurs dans le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_G$, pour tout k entier naturel non nul on a $k\left(u\left(\frac{1}{k}\right) - u(0)\right) \in \mathcal{A}_G$. Or, un sous-espace vectoriel F d’un espace vectoriel de dimension finie E est toujours fermé (on peut toujours le considérer comme le noyau d’un certain endomorphisme φ de E , par exemple un projecteur, et comme φ est continu d’après le cours, $F = \text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0_E\})$ est fermé). En faisant tendre k vers l’infini, on a alors $u'(0) \in \mathcal{A}_G$, soit $[A, B] \in \mathcal{A}_G$.

14. Soit $M \in \mathcal{A}_G$. Considérons l’application $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ définie par $\gamma(t) = e^{tM}$. Alors γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$, donc $M \in \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

15. La matrice M est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, soit $M = PTP^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ qui sont les valeurs propres complexes de M . Pour tout t réel, on a alors

$$\begin{aligned} \delta_M(t) &= \det(P(I_n + tT)P^{-1}) = \det(I_n + tT) = \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i) \\ &= (1 + t\lambda_1) \cdots (1 + t\lambda_n) \\ &= 1 + t \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) + o(t) \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0 \\ &= 1 + t \text{tr}(M) + o(t). \end{aligned}$$

Comme δ_M admet un développement limité à l’ordre un en zéro, elle est dérivable en ce point, avec $\delta'_M(0) = \text{tr}(M)$.

16. L’application $\det$ étant différentiable en tout point, on a, d’après le cours, la dérivabilité de δ_M avec $\delta'_M(t) = d(\det)(I_n + tM) \cdot M$, en particulier

$$\delta'_M(0) = d(\det)(I_n) \cdot M,$$

et ceci pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La forme linéaire $d(\det)(I_n)$, i.e. la différentielle du déterminant en I_n est donc $M \mapsto \text{tr}(M)$.

- 17. •** Avec $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, prenons $M \in \mathcal{T}_{I_n}(G)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a $\det(\gamma(t)) = 1$, ce qui se dérive en $d(\det)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ et, en évaluant pour $t = 0$, on obtient $d(\det)(I_n) \cdot M = 0$, soit $\mathrm{tr}(M) = 0$, donc $M \in \mathcal{A}_G$ d'après **Q9**. Avec **Q14.**, on a prouvé que $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.
- Avec $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, prenons $M \in \mathcal{T}_{I_n}(G)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a $(\gamma(t))^T \cdot \gamma(t) = I_n$, ce qui se dérive en $(\gamma'(t))^T \cdot \gamma(t) + (\gamma(t))^T \cdot \gamma'(t) = 0_n$ et, pour $t = 0$, on obtient $M^T + M = 0_n$, donc $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Avec **Q10.** et **Q14.**, de nouveau on a montré que $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.

Partie D. Comportement asymptotique de f_A .

- 18.** Notons u l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A . Soit ε_1 un vecteur propre de u pour la valeur propre α , et ε_2 un vecteur propre de u pour la valeur propre β . Comme $\chi_u = \chi_A = (X - \alpha)(X - \beta)^2$ annule u d'après Cayley-Hamilton, le lemme des noyaux nous apprend que $\mathbb{C}^3 = F_1 \oplus F_2$ avec $F_1 = \mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_E)$ et $F_2 = \mathrm{Ker}((u - \beta \mathrm{Id}_E)^2)$. Comme $\dim(F_1) = 1$ car la valeur propre α est simple, on a $\dim(F_2) = 2$. Comme (ε_2) est une famille libre dans F_2 , on peut la compléter en une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de F_2 , et alors $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$. Enfin, F_2 est stable par u , donc il existe a et b scalaires tels que $u(\varepsilon_3) = a\varepsilon_2 + b\varepsilon_3$. Comme $\mathrm{Tr}(u) = \alpha + 2\beta$, on a $b = \beta$, ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$, ce qui montre que A est semblable à T pour une certaine valeur de a . On peut s'arranger pour avoir $a = 1$.

On décompose T en $T = D + N$, avec $D = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \beta)$ et $N = aE_{2,3}$, ces deux matrices commutent et $N^2 = 0$. La formule du binôme donne alors, pour tout n entier naturel non nul,

$$T^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & na\beta^{n-1} \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}.$$

Ensuite, pour tout t réel,

$$e^{tT} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} T^n = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \beta^n & a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} \beta^{n-1} \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \beta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\beta} & ate^{t\beta} \\ 0 & 0 & e^{t\beta} \end{pmatrix}.$$

Comme $|e^{t\alpha}| = e^{t \cdot \mathrm{Re}(\alpha)}$, on voit que les coefficients diagonaux ont une limite nulle en $+\infty$ si et seulement si $(\mathrm{Re}(\alpha) < 0 \text{ et } \mathrm{Re}(\beta) < 0)$, cette condition est donc nécessaire pour que l'on ait $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tT} = 0_3$. Elle est aussi suffisante puisque, si elle est réalisée, par croissances comparées, le coefficient d'indices $(2, 3)$ aura aussi une limite nulle en $+\infty$.

Enfin, A étant semblable à T , on peut écrire $A = PTP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ et, d'après une propriété rappelée en préambule, on aura alors $e^{tA} = P e^{tT} P^{-1}$ pour tout t réel, et donc aussi $e^{tT} = P^{-1} e^{tA} P$. De la continuité du produit matriciel, on déduit finalement que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} = 0_3 \iff \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tT} = 0_3 \iff \left(\operatorname{Re}(\alpha) < 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(\beta) < 0 \right).$$

19. Il s'agit de montrer que les valeurs propres de A ont toutes une partie réelle strictement négative. Soit donc $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, soit Z un vecteur propre associé, i.e. $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $Z \neq 0$ et $AZ = \lambda Z$. Soit t un réel. On a alors $P(A) \cdot Z = P(\lambda) Z$ pour tout polynôme P de

$\mathbb{C}[X]$ par un calcul classique, donc en particulier si P est l'un des polynômes $P_k = \sum_{j=0}^k \frac{t^j X^j}{j!}$,

puis $e^{tA} \cdot Z = e^{t\lambda} Z$ en faisant tendre k vers l'infini, par continuité du produit matriciel.

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} = 0_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on déduit $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t\lambda} Z = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} \cdot Z = 0$ dans $\mathbb{C}^n$ (encore par continuité du produit matriciel). Au moins une des coordonnées z_i ($1 \leq i \leq n$) du vecteur Z est non nulle. De $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t\lambda} z_i = 0$, on déduit $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t\lambda} = 0$, puis $|e^{t\lambda}| = e^{t \operatorname{Re}(\lambda)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit enfin que $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, ce qu'il fallait prouver.

20. On sait que $\chi_A = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$. Le théorème de Cayley-Hamilton dit que $\chi_A(A) = 0_n$.

Les polynômes $(X - \lambda)^{m_\lambda}$ étant deux à deux premiers entre eux, le lemme de décomposition des noyaux donne l'égalité

$$\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker}(\chi_A(A)) = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} F_\lambda.$$

21. Indexons les valeurs propres **distinctes** de A sous la forme $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, posons $F_i = F_{\lambda_i}$ pour simplifier, $m_i = m_{\lambda_i}$, puis $d_i = \dim(F_i)$. Chaque "sous-espace caractéristique" $F_i = \operatorname{Ker}((u - \lambda_i \operatorname{Id}_E)^{m_i})$ est stable par u puisque c'est le noyau d'un polynôme en u , et l'endomorphisme u_i induit par u sur F_i admet pour polynôme annulateur $(X - \lambda_i)^{m_i}$, donc $u_i = \lambda_i \operatorname{Id}_{F_i} + \nu_i$, où ν_i est un endomorphisme nilpotent de F_i . Dans une base $\mathcal{B}_i$ de F_i , l'endomorphisme induit u_i est donc représenté par une matrice de la forme $\lambda_i I_{d_i} + N_i$, où $N_i \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{C})$ est nilpotente. Dans la base $\mathcal{B}$ de E obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_i$, l'endomorphisme u est donc représenté par la matrice diagonale par blocs

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{d_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{d_k} + N_k).$$

Si $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vers la base $\mathcal{B}$, on a alors $A = P\Delta P^{-1}$. Enfin, $\Delta = D + N$ où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{d_1}, \dots, \lambda_k I_{d_k})$ est diagonale, et $N = \operatorname{diag}(N_1, \dots, N_k)$ est nilpotente. En effet, si $N_i^{p_i} = 0_{d_i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, alors $N^p = 0_n$ en posant $p = \max_{1 \leq i \leq k} p_i$. Donc $A = P(D + N)P^{-1}$. Chaque matrice N_i commute avec $\lambda_i I_{d_i}$ qui est une matrice scalaire, donc par un calcul par blocs, D et N commutent. Enfin, chaque endomorphisme induit u_i sur F_i admet pour seule valeur propre λ_i , donc admet pour polynôme caractéristique $(X - \lambda_i)^{d_i}$. Par un calcul par blocs,

$$\chi_A = \chi_u = \prod_{i=1}^k \chi_{u_i} = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{d_i} = \chi_D$$

(ce qui montre au passage l'égalité $d_i = m_i$ pour tout i).

- 22.** Soit p l'indice de nilpotence de la matrice N , i.e. $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid N^k = 0\}$. Comme tD et tN commutent pour tout réel t , on a

$$e^{tA} = e^{P(tD+tN)P^{-1}} = P e^{t(D+N)} P^{-1} = P e^{tD} e^{tN} P^{-1} = P e^{tD} \left(\sum_{k=0}^{p-1} t^k \frac{N^k}{k!} \right) P^{-1}.$$

La matrice e^{tD} est diagonale, de coefficients diagonaux $e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres (**non nécessairement distinctes**) de D , et donc aussi de A d'après **Q21**. Si l'on note $\nu_{i,j}^{(k)}$ le coefficient d'indices (i, j) de la matrice N^k , $w_{i,j}(t)$ celui de la matrice $e^{t(D+N)} = e^{tD} e^{tN}$, on a donc, par le calcul des coefficients d'un produit matriciel,

$$w_{i,j}(t) = e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\nu_{i,j}^{(k)}}{k!} t^k.$$

Comme, pour $t > 0$, $|e^{t\lambda_i}| = e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)} \leq e^{\alpha t}$, on a alors $w_{i,j}(t) = O(t^{p-1} e^{\alpha t})$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Enfin, le calcul de $v_{i,j}(t)$ fait intervenir la multiplication à gauche par P , à droite par P^{-1} , et comme ces matrices de passage sont indépendantes de la variable t , chaque fonction $v_{i,j}$ est combinaison linéaire des fonctions $w_{r,s}$, ($1 \leq r, s \leq n$), on en déduit que $v_{i,j}(t) = O(t^{p-1} e^{\alpha t})$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

- 23.** On a vu en **Q19**, qu'une condition nécessaire pour que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} = 0_n$ était que $\alpha < 0$.

Réciproquement, cette condition est suffisante puisque, si elle est réalisée, la question **Q22** ci-dessus montre, par croissances comparées, que $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_{i,j}(t) = 0$ pour tout couple (i, j) , donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} = 0_n$.

On conclut donc que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} = 0_n$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

- 24.** Le sens indirect est évident.

Réciproquement, procédons par contraposition. Commençons par trigonaliser A : on a $A = QTQ^{-1}$ avec $Q \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ qui sont les valeurs propres de A . Si $X \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur non nul, alors $e^{tA} = Q e^{tT} Q^{-1}$, et $e^{tA} X = Q e^{tT} Y$ en posant $Y = Q^{-1} X = (y_1, \dots, y_n)$. Comme Y est un vecteur non nul, on peut considérer l'indice $p = \max\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid y_k \neq 0\}$, ainsi $Y = (y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ avec $y_p \neq 0$. La matrice e^{tT} est aussi triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}$ (cf. **Q5**). En effectuant le produit matriciel

$$e^{tT} Y = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{t\lambda_p} & & & \\ & & & e^{t\lambda_{p+1}} & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

on observe que la p -ième coordonnée de ce produit vaut $y_p e^{t\lambda_p}$, elle a donc pour module $|y_p| e^{t \operatorname{Re}(\lambda_p)}$ et, comme $\operatorname{Re}(\lambda_p) \geq 0$ et $y_p \neq 0$, elle ne tend pas vers 0 lorsque t tend vers

$+\infty$. Donc le vecteur $e^{tT}Y$ ne tend pas vers 0, et donc le vecteur $e^{tA}X = Q e^{tT}Y$ non plus (raisonner par contraposition, en utilisant la continuité du produit matriciel).

- 25.** Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = P_s P_i P_n$, et ces trois facteurs sont deux à deux premiers entre eux (ils sont deux à deux sans racine commune). Comme $\chi_A(A) = 0_n$ par Cayley-Hamilton, le lemme de décomposition des noyaux donne immédiatement

$$E = \mathbb{C}^n = E_s \oplus E_i \oplus E_n .$$

Chacun des trois sous-espaces E_s, E_i, E_n est stable par u (car ces sous-espaces sont des noyaux de polynômes en u), notons u_s, u_i et u_n les endomorphismes induits. Chacun des trois sous-espaces est alors stable par tout polynôme en l'endomorphisme u , puis en passant à la limite comme en **Q1**. est stable aussi par l'endomorphisme e^{tu} (représenté par la matrice e^{tA}) pour tout t réel. *En effet, tout s.e.v. est fermé en dimension finie, ce qui justifie ce passage à la limite.*

L'endomorphisme u_s de E_s n'a que des valeurs propres de partie réelle strictement négative puisqu'il admet P_s pour polynôme annulateur. Il résulte alors de **Q23**. que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tu_s} = 0$ (endomorphisme nul de E_s), ou encore que, pour tout vecteur X de E_s , $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}X = 0$.

L'endomorphisme u_i de E_i n'a que des valeurs propres de partie réelle strictement positive puisqu'il admet P_i pour polynôme annulateur. Il résulte alors de **Q24**. que, si X est un vecteur de E_i , on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}X = 0$ si et seulement si $X = 0$. Même remarque pour un vecteur X de E_n puisque u_n n'a que des valeurs propres de partie réelle nulle.

Munissons chacun des sous-espaces E_s, E_i, E_n d'une norme, ces normes seront notées respectivement $\|\cdot\|_s, \|\cdot\|_i$ et $\|\cdot\|_n$. Pour tout vecteur X de $E = \mathbb{C}^n$, se décomposant en $X = X_s + X_i + X_n$, posons

$$\|X\|_E = \|X_s\|_s + \|X_n\|_n + \|X_i\|_i .$$

Il est immédiat que $\|\cdot\|_E$ est alors une norme sur E .

Si X est un vecteur de $\mathbb{C}^n$ se décomposant en $X = X_s + X_i + X_n$, alors la décomposition du vecteur $e^{tA}X$ est $e^{tA}X = e^{tA}X_s + e^{tA}X_i + e^{tA}X_n$, donc

$$\|e^{tA}X\|_E = \|e^{tA}X_s\|_s + \|e^{tA}X_i\|_i + \|e^{tA}X_n\|_n .$$

Il est donc clair que l'on a l'équivalence

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}X = 0 \iff \begin{cases} (1) : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}X_s = 0 \\ (2) : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}X_i = 0 \\ (3) : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}X_n = 0 \end{cases} .$$

Par les remarques ci-dessus, la condition **(1)** est satisfaite pour tout vecteur X_s de E_s , et les conditions **(2)** et **(3)** sont satisfaites si et seulement si $X_i = X_n = 0$.

Finalement,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}X = 0 \iff X_i = X_n = 0 \iff X \in E_s .$$

26. • Soit $X \in E_n$, alors $e^{tA}X = e^{tu_n}(X)$ (notation u_n introduite ci-dessus), et l'endomorphisme u_n de E_n n'a que des valeurs propres imaginaires pures, on peut donc appliquer **Q22.** avec $\alpha = 0$ pour affirmer qu'il existe un entier naturel p tel que $v_{i,j}(t) = (e^{tA_n})_{i,j} = O(t^p)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, A_n étant la matrice représentant u_n dans une certaine base de E_n . Lorsque t tend vers $+\infty$, les coordonnées dans cette base du vecteur $e^{tA}X$ sont alors aussi $O(t^p)$, puis finalement, quelle que soit la norme choisie sur E_n puisqu'elles sont équivalentes, $\|e^{tA}X\|_E = \|e^{tA}X\|_n = O(t^p)$ lorsque t tend vers $+\infty$. On a le même résultat lorsque $t \rightarrow -\infty$ en remplaçant u_n par $-u_n$, qui est aussi à valeurs propres imaginaires pures. Il existe donc des constantes positives B, B', K, K' telles que

$$t \geq B \implies \|e^{tA}X\|_E \leq K t^p \quad \text{et} \quad t \leq -B' \implies \|e^{tA}X\|_E \leq K' |t|^p.$$

La fonction $t \mapsto \frac{\|e^{tA}X\|_E}{(1+|t|)^p}$ est alors continue sur $\mathbb{R}$, bornée sur $] -\infty, -B']$ et sur $[B, +\infty[$, et elle est aussi bornée sur $[-B', B]$ car c'est un segment, elle est finalement bornée sur $\mathbb{R}$. On a ainsi prouvé l'inclusion

$$E_n \subset \{X \in E \mid \exists C \in \mathbb{R}_+^* \exists p \in \mathbb{N} \forall t \in \mathbb{R} \quad \|e^{tA}X\|_E \leq C (1+|t|)^p\}.$$

• Soit $X \in \mathbb{C}^n \setminus E_n$, écrivons $X = X_s + X_i + X_n$, au moins l'un des deux vecteurs X_s ou X_i étant non nul. Si, par exemple, X_i est non nul, le raisonnement de **Q24.** montre que l'une des coordonnées (dans une base de trigonalisation de u_i) du vecteur $e^{tA}X_i = e^{tu_i}(X_i)$ a une croissance exponentielle lorsque t tend vers $+\infty$. Il en résulte que $\|e^{tA}X_i\|_i$ n'est dominé par aucun monôme t^p lorsque $t \rightarrow +\infty$. Alors $\|e^{tA}X\|_E \geq \|e^{tA}X_i\|_i$ n'est pas dominé non plus par un monôme t^p en $+\infty$. Même raisonnement lorsque $t \rightarrow -\infty$ si la composante X_s est non nulle. Donc $X \notin \{X \in E \mid \exists C \in \mathbb{R}_+^* \exists p \in \mathbb{N} \forall t \in \mathbb{R} \quad \|e^{tA}X\|_E \leq C (1+|t|)^p\}$, ce qui prouve l'inclusion inverse.