

Programme de colle – MPI

1. Endomorphismes autoadjoints

Reprise pour exercices
Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien Endomorphisme autoadjoint : définition par $u^* = u$. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée. Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints. Théorème spectral : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E , alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u .	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». Notation $\mathcal{S}(E)$. Interprétation matricielle : une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.
Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E), \mathcal{S}^{++}(E)$. Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Fonctions vectorielles

Extrait du programme officiel :
Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E .

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dérivabilité en un point Dérivabilité en un point.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. Traduction en termes de coordonnées dans une base.
Opérations sur les fonctions dérivables Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L(f)$, où L est linéaire. Dérivabilité et dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \dots, f_p)$, où M est multilinéaire. Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle. Applications de classe $\mathcal{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$.	Cas du produit scalaire, du déterminant.

Intégration sur un segment

Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$. Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Pour L linéaire, intégrale de $L(f)$. Inégalité triangulaire $\left\ \int_a^b f \right\ \leq \int_a^b \ f\ $. Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	Notations $\int_{[a,b]} f, \int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$.
---	--

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.
Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe. Notations $\exp(a), e^a, \exp(A), e^A$.
Exponentielle d'une matrice diagonale. Exponentielle de matrices semblables. Spectre de $\exp(A)$.
Continuité de l'exponentielle sur $\mathcal{L}(E)$, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Dérivation de $t \mapsto \exp(ta)$ de $t \mapsto \exp(tA)$.
Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices carrées, qui commutent.

Adaptation au cas vectoriel de l'étude des séries, des suites de fonctions, des séries de fonctions.
C'est l'occasion de réviser tous ces chapitres vus il y a quelques mois dans le cas numérique et qui peuvent donner lieu à des exercices.
La propriété sur l'exponentielle d'une somme sera démontrée dans le chapitre équations différentielles.

3. Calcul différentiel

⚠ La notion de différentielle n'a pas encore été introduite.
Cette semaine, on travaille avec des fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et on utilise uniquement les dérivées partielles et le gradient, plutôt que la différentielle.
L'optimisation sous contrainte n'est pas au programme cette semaine.

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dérivées partielles Dérivées partielles Expression du gradient Règle de la chaîne. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$. Dérivées partielles d'une composée	Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \partial_i f(a)$. Notation $\nabla f(a)$. Dérivées partielles de $(u_1, \dots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m))$.

Applications de classe $\mathcal{C}^1$

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω .
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Optimisation : étude au premier ordre Point critique d'une application admettant des dérivées partielles Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.	Exemples de recherches d'extremums globaux.
Applications de classe $\mathcal{C}^k$ Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une application est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω . Théorème de Schwarz. Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$.	Notations $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}, \partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f, \partial_{j_1, \dots, j_k} f$. La notion de différentielle seconde est hors programme. Démonstration non exigible. Les démonstrations ne sont pas exigibles. Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.
Optimisation : étude au second ordre Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :	Notation $H_f(x)$. La démonstration n'est pas exigible.
$f(x+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x) \cdot h, h \rangle + o(\ h\ ^2),$ $f(x+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(x) h + o(\ h\ ^2).$	
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f admet un minimum local en x , alors x est point critique de f et $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si x est point critique de f et si $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en x .	Adaptation au cas d'un maximum local. Adaptation au cas d'un maximum local. Explicitation pour $n=2$ (trace et déterminant).

4. EDL

Révision du programme de MP2I.

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Équations différentielles linéaires du premier ordre Équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + a(x)y = b(x)$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' + a y' + b y = f(x)$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition.	Équation homogène associée. Si a et b sont réels, description des solutions réelles.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B \cos(\omega x)$ et $x \mapsto B \sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$. La démonstration de ce résultat est hors programme.

Semaine suivante : Optimisation sous contrainte. Équations différentielles.

5. Questions de cours

- Les questions de cours munies d'un astérisque ***** ne sont posables qu'aux trinômes 6, 7.
- Les membres de ces trois trinômes doivent savoir faire tous les exercices CCINP mais ne seront éventuellement interrogés que sur les 40, 56 et 61.

- *** Théorème spectral. Caractérisations spectrales de la positivité et de la défini-positivité.
- *** Définition de $\exp$ sur $\mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie ou sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Continuité de $\exp$ sur $\mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie ou sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Dérivation de $t \mapsto \exp(tu)$ où $u \in \mathcal{L}(E)$, ou de $t \mapsto \exp(tA)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
L'exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice est un polynôme en celui/celle-ci.
- *** Exercice classique : Racines carrées et décomposition polaire
 - Racine carrée** : Soit u un endomorphisme autoadjoint positif.
 - Établir l'existence d'un endomorphisme h symétrique positif tel que $h^2 = u$. Traduction matricielle ?
 - Démontrer l'unicité de h . Que peut-on dire de h si u est défini positif ?
 - Décomposition polaire** : Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(Q, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.
 - Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé puis étendre le résultat d'existence de la décomposition polaire à toute matrice carrée réelle (mais sans unicité) en utilisant sans les prouver les résultats classiques de densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de compacité de $\mathcal{O}(n)$.
- *** Exercice classique : Formules variationnelles et rayon spectral
Soit E est un espace euclidien, $(\cdot | \cdot)$ son produit scalaire, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, $||| \cdot |||$ la norme de $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.
 - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $x \mapsto \frac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$ atteint sur $E \setminus \{0_E\}$ un minimum et un maximum qui sont respectivement $\min(\text{Sp } u)$ et $\max(\text{Sp } u)$. Traduction matricielle ?
 - Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $|||u||| = |||u^*|||$.
Le **rayon spectral** de $u \in \mathcal{L}(E)$ est, par définition, $\rho(u) = \max_{\lambda \in \text{Sp } u} |\lambda|$.
 - Si $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $\rho(u) = |||u|||$.
 - Si $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $|||u|||^2 = |||u^* \circ u||| = \rho(u^* \circ u)$.

- *** Exercice classique : l'homéomorphisme $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
Montrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme (c'est-à-dire une bijection continue à réciproque continue) de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
On pourra, pour l'injectivité, admettre que deux matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables.
On pourra, pour la continuité de la réciproque, utiliser des suites et utiliser librement le rayon spectral et ses propriétés.

- Exercices CCINP 33, 40, 42, 52, 56, 57, 61, 66.

6. Exercices CCINP

- **CCINP 33** : On pose : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

■ **CCINP 40**

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\| \cdot \|$.

On suppose que : $\forall (u, v) \in A^2, \|u \cdot v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.
 - (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
 - (b) Démontrer que $(e - u)$ est inversible et que

$$(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n.$$

2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

- **CCINP 42** : On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

- **CCINP 52** : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Prouver que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
(b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
 - (a) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.
 - (b) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et donner leur valeur.
 - (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

- **CCINP 56** : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2.$$

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0, 1] \times [0, 1]$.
Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

- **CCINP 57** :

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
 - (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.
 - (b) Donner la définition de « f différentiable en $(0, 0)$ ».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- **CCINP 61**

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}|.$$

1. Prouver que $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\| \leq n \|A\| \|B\|.$$

Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geq 1$,

$$\|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p.$$

3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
Est-elle convergente ?

- **CCINP 66** :

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.