

1

Topologie matricielle

1. Densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
2. Densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (donc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
3. Continuité de $\det$, de $A \mapsto \chi_A$, de $A \mapsto \text{Com } A$, de $A \mapsto A^{-1}$.
4. $\mathcal{O}(n)$ est compact et n'est pas connexe par arcs.
5. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas.

Solution de 1 : Topologie matricielle

1. ■ Soit par le spectre : si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors à partir d'un certain rang, $M_k = M - \frac{1}{k} I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ car $\text{Sp } M$ est fini et $M_k \rightarrow M$
 ■ Soit avec les matrices J_r : soit $r = \text{rg } M$. M est donc équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$: on a P, Q inversibles telles que $M = P J_r Q$.
 On pose $J_{r,k} = J_r + \frac{1}{k} I_n$ matrice diagonale inversible telle que $J_{r,k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} J_r$.
 Or $M \mapsto P M Q$ est linéaire sur un espace de dimension finie donc continue et alors

$$M_k = P J_{r,k} Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow P J_r Q = M.$$

2. M est trigonalisable : on peut écrire $M = P T P^{-1}$ avec T triangulaire, avec sur la diagonale les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité. Soit, pour $k \geq 1$,

$$T_k = T + \text{diag}\left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{n}{k}\right).$$

Il n'y a qu'un nombre fini de k pour lesquels on ait $\lambda_i + \frac{i}{k} = \lambda_j + \frac{j}{k}$ avec $i \neq j$, ce qui revient à $\frac{1}{k} = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{i - j}$, on est sûr à partir d'un certain rang que T_k possède n valeurs propres distinctes en dimension n , donc est diagonalisable. C'est donc aussi le cas de $M_k = P T_k P^{-1}$.

Or $M_k \rightarrow M$ car $T_k \rightarrow T$ et $A \mapsto P A P^{-1}$ linéaire sur un espace de dimension finie donc continue.

D'où la densité.

3. ■ L'application $\det$ est polynomiale en les coefficients de la matrice.
 ■ L'application $A \mapsto \chi_A = \det(X I_n - A)$ est continue car les coefficients du polynôme caractéristique sont polynomiaux en ceux de A .
 ■ Les coefficients de $\text{Com } A$ sont polynomiaux en ceux de A car $\pm$ des déterminants extraits de A .
 ■ L'application $A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Com } A)^T$ est continue par opérations, l'application transposée l'étant car linéaire sur un espace de dimension finie.
4. ■ On est en dimension finie, il suffit de montrer que $\mathcal{O}(n)$ est fermée et bornée pour n'importe quelle norme. Or
 * $\mathcal{O}(n)$ est fermée comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M \mapsto M^T M$ (bilinearité du produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$ et linéarité de la transposition sur des espaces de dimension finie, ou bien car les coefficients de $M^T M$ sont polynomiaux en ceux de M) ;
 * $\mathcal{O}(n)$ est bornée car, avec la norme euclidienne $\|M\|_2 = \sqrt{\text{tr}(M^T M)}$, on a $\mathcal{O}(n) \subset \overline{B}_2(0, \sqrt{n})$, ou bien, avec la norme infini, $\mathcal{O}(n) \subset \overline{B}_\infty(0, 1)$ car les colonnes sont normées donc tous les coefficients sont dans $[-1, 1]$.
 ■ $\mathcal{O}(n)$ n'est pas connexe par arcs car $\det(\mathcal{O}(n)) = \{\pm 1\}$ non connexe par arcs alors que $\det$ est continue.
5. ■ $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs : on montre que chaque matrice inversible peut être jointe continûment à I_n . Pour cela, on trigonalise (on peut), $M = P T P^{-1}$. On note d_i les coefficients diagonaux de T . Par connexité par arcs de $\mathbb{C}^*$, pour chaque $d_i (\neq 0)$, on a un chemin continu $\phi_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ tel que $\phi_i(1) = d_i$ et $\phi_i(0) = 1$.

$$\text{On pose alors } A(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & & (t \cdot t_{1,j}) \\ & \ddots & \\ 0 & & \phi_n(t) \end{pmatrix}.$$

$\Phi : t \mapsto P A(t) P^{-1}$ continue par opérations (car $t \mapsto A(t)$ l'est et $M \mapsto P M P^{-1}$ est linéaire sur un espace de dimension finie donc continue), à valeurs inversibles, $\Phi(0) = I_n$ et $\Phi(1) = M$.

- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs car $\det(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ non connexe par arcs alors que $\det$ est continue.

2 Décomposition QR et inégalité de Hadamard

1. Montrer que si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $Q \in \mathcal{O}(n)$ et une matrice $R \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = QR$.
2. Connaissant une telle décomposition, les déterminer toutes.
3. On veut montrer l'**inégalité de Hadamard** : si M est une matrice carrée réelle, $(C_1, \dots, C_n)$ la famille de ses vecteurs colonnes, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$|\det M| \leq \|C_1\| \cdots \|C_n\|$$

- a) Montrer l'inégalité lorsque M n'est pas inversible.
- b) Montrer l'inégalité lorsque M est inversible en utilisant une décomposition QR.

Solution de 2 : Décomposition QR et inégalité de Hadamard

1. Si $(C_1, \dots, C_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de A , A est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_n)$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique (pour lequel, donc, $\mathcal{B}_c$ est orthonormale).

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de $\mathcal{C}$ par le procédé de Schmidt. On a alors, avec des notations habituelles :

$$A = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}.$$

Mais

- $Q = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$, matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale, est orthogonale.
 - Et l'algorithme de Gram-Schmidt garantit que, pour tout k , $C_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ où l'on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ – on a en effet, pour tout k , $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_k)$ – donc $R = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est triangulaire supérieure.
2. À quelle condition a-t-on $QR = Q_0 R_0$ où Q et Q_0 sont orthogonales, R et R_0 triangulaires supérieures inversibles ?
On remarque que l'égalité étudiée équivaut à

$$Q_0^{-1} Q = R_0 R^{-1}$$

où le premier membre est une matrice orthogonale, le second une matrice triangulaire supérieure.

Le problème est donc : quelles sont les matrices à la fois orthogonales et triangulaires supérieures ? Construisons une telle matrice M :

- M est triangulaire supérieure donc son inverse M^{-1} l'est aussi. Or $M^{-1} = M^T$ est triangulaire inférieure donc M est nécessairement diagonale. Comme les colonnes de M sont normées, les coefficients diagonaux valent ± 1 . Réciproquement, de telles matrices sont bien orthogonales et triangulaires supérieures.
- Autre argument possible : le premier vecteur colonne de M est unitaire et seule le premier coefficient est possiblement non nul, donc vaut $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Son deuxième vecteur colonne est orthogonal au premier, son premier coefficient est donc nul. Donc seule son deuxième coefficient est non nul, et vaut nécessairement ± 1 car il est unitaire. Il vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi de suite...

Bref, $\mathcal{O}(n) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) = \{D_\varepsilon, \varepsilon \in \{-1, 1\}^n\}$ où, si $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $D_\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. On conclut que

$$QR = Q_0 R_0 \iff \exists \varepsilon \in \{-1, 1\}^n \quad R = D_\varepsilon R_0 \text{ et } Q = Q_0 D_\varepsilon$$

(on s'est servi du fait que D_ε était sa propre inverse).

Grosso modo, cela signifie que dans deux décompositions QR , au signe près on retrouve les mêmes coefficients.

3. (a) L'inégalité, qui s'écrit $0 \leq \|C_1\| \cdots \|C_n\|$, est vraie.
- (b) On suppose M inversible. On note $(C'_1, \dots, C'_n)$ les colonnes de R . Alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_k = Q C'_k$. Donc

$$\|C_k\|^2 = C_k^T C_k = (Q C'_k)^T (Q C'_k) = C_k'^T Q^T Q C'_k = C_k'^T C'_k = \|C'_k\|^2.$$

(On pourrait aussi utiliser le fait que Q représente une isométrie en base orthonormale au lieu de le redémontrer). Or, pour tout k ,

$$\|C_k\| = \|C'_k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k R_{i,k}^2} \geq |R_{k,k}|$$

Il suffit alors de remarquer que

$$|\det M| = |\det R| = \prod_{k=1}^n |R_{k,k}|$$

pour conclure.

3

Théorème des compacts emboîtés – Propriété de Borel Lebesgue Les deux questions sont indépendantes.

Soit K une partie compacte non vide d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$.

- Montrer que si (F_n) une suite décroissante de parties fermées de K (donc compactes) et non vides, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.
- On veut montrer que K vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : « De tout recouvrement de K par des ouverts : $K \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, on peut extraire un recouvrement fini : $K \subset \bigcup_{i \in J} \mathcal{O}_i$ où J partie finie de I . »
 - Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir K par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε , c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.
 - On suppose que $K \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ où les $\mathcal{O}_i$ sont des ouverts. Montrer qu'on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$,

$$\exists i \in I, B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}_i.$$

En déduire que K vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

Solution de 3 : Théorème des compacts emboîtés – Propriété de Borel Lebesgue

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons un élément x_n dans F_n et étudions la suite (x_n) .
La suite (x_n) est une suite d'éléments du compact K , elle admet donc une valeur d'adhérence $\bar{x}$ et il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \bar{x}$.
La suite (F_n) étant décroissante, on vérifie que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(x_n)_{n \geq p}$ est une suite d'éléments de F_p . La suite extraite $(x_{\varphi(k)})_{k \geq p}$ est donc une suite d'éléments du fermé F_p et par conséquent $\bar{x} \in F_p$. Cela valant pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut conclure

$$\bar{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

- (a) Par contraposée, Si on a $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x_1, \dots, x_n$, $K \not\subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.

Donnons-nous $x_0 \in K$. puis $x_1 \in K$ tel que $x_1 \notin B(x_0, \varepsilon)$. Puis $x_2 \notin \bigcup_{i=0}^1 B(x_i, \varepsilon)$.

Et, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K$ tel que $x_n \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} B(x_i, \varepsilon)$.

On a alors, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n \neq m$, $\|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$.

On peut donc pas extraire de (x_n) une suite convergente (sinon on aurait $\varepsilon \leq \|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n+1)}\| \rightarrow 0$) : K n'est pas compact.

- Supposons K compact et $K \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$.

- On montre qu'on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$, $\exists i \in I, B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}_i$.

Il suffira alors d'appliquer le résultat montré précédemment avec cet ε .

Or, si, par l'absurde, ce n'était pas le cas, on aurait

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in K, \forall i \in I, B(x, \varepsilon) \cap \mathcal{O}_i^c \neq \emptyset$$

Avec $\varepsilon = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, on construit une suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in I$, $B(x_n, \frac{1}{n}) \cap \mathcal{O}_i^c \neq \emptyset$.

On extrait par compacité $x_{\varphi(n)} \rightarrow x \in K \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$.

On a donc $i \in I$ tel que $x \in \mathcal{O}_i$.

Prenons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \in B(x_n, \frac{1}{n}) \cap \mathcal{O}_i^c$. Alors $\|y_n - x_n\| < \frac{1}{n}$ donc $y_n - x_n \rightarrow 0_E$.

Mais $y_{\varphi(n)} = (y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}) + x_{\varphi(n)} \rightarrow x \in \mathcal{O}_i$ qui est ouvert.

Donc à partir d'un certain rang, $y_{\varphi(n)} \in \mathcal{O}_i$ ce qui est contradictoire.

- On a donc bien un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}_i$.

On a montré à la question précédente qu'on peut trouver $x_1, \dots, x_n \in K$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.

Or pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $i_k \in I$ tel que $B(x_k, \varepsilon) \subset \mathcal{O}_{i_k}$. On a donc bien $K \subset \bigcup_{k=1}^n \mathcal{O}_{i_k}$.

4 Racines carrées et décomposition polaire

1. **Racine carrée** : Soit u un endomorphisme autoadjoint positif.
 - (a) Établir l'existence d'un endomorphisme h symétrique positif tel que $h^2 = u$. Traduction matricielle ?
 - (b) Démontrer l'unicité de h . Que peut-on dire de h si u est défini positif ?
2. **Décomposition polaire** : Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(Q, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.
3. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé puis étendre le résultat d'existence de la décomposition polaire à toute matrice carrée réelle (mais sans unicité) en utilisant sans les prouver les résultats classiques de densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de compacité de $\mathcal{O}(n)$.

Solution de 4 : Racines carrées et décomposition polaire

1. **Racine carrée**
 - (a) Par le théorème spectral, on se donne $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthodagonalisante de u avec pour tout i , $u(e_i) = \lambda_i e_i$ où $\lambda_i \geq 0$ et on pose h l'unique endomorphisme tel que pour tout i , $h(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$.
Vu les matrices (diagonales) de h et u dans la base $\mathcal{B}$, cela convient : $h^2 = u$.
On peut aussi raisonner directement matriciellement : pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$, via le théorème spectral.
 - (b) u est un polynôme en h , donc commute avec. Comme dans le classique de la diagonalisation simultanée, on considère $E_\lambda(u)$ un sous-espace propre de u , stable par h , qui induit dessus un endomorphisme h_λ autoadjoint donc diagonalisable.
Mais comme h_λ est positif et $h_\lambda^2 = u_\lambda = \lambda \text{id}_{E_\lambda(u)}$, nécessairement $h_\lambda = \sqrt{\lambda} \text{id}_{E_\lambda(u)}$. En effet, si μ valeur propre de h_λ , alors $\mu^2 = \lambda$ et $\mu \geq 0$ donc $\mu = \sqrt{\lambda}$. Et comme h_λ est diagonalisable, par théorème spectral, avec une seule valeur propre, on a bien $h_\lambda = \sqrt{\lambda} \text{id}_{E_\lambda(u)}$.
Comme $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp } u} E_\lambda(u)$ (car u est diagonalisable), h est bien unique.

2. **Décomposition polaire** : une analyse permet de voir que si on a une telle décomposition $A = QS$, alors $A^T = S^T Q^T = S Q^{-1}$ donc $A^T A = S^2$.

Or $A^T A$ est assez facilement une matrice symétrique. Et, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T(A^T A)X = Y^T Y$ où $Y = AX$.

Or, si $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = AX \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ car A est inversible, donc $Y^T Y = \|Y\|^2 > 0$.

En utilisant les questions précédentes, il existe S symétrique défini-positif telle que

$$S^2 = A^T A$$

Posons $Q = AS^{-1}$; on calcule

$$Q^T Q = (S^{-1})^T A^T A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$$

Donc Q est orthogonale.

L'unicité repose, d'après la remarque initiale, sur le fait qu'une matrice symétrique définie-positive a une unique racine carrée définie positive.

3. ■ On a $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}$ avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ fermé en tant que sous-espace de dimension finie et

$$\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M X \geq 0\} = \bigcap_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} f_X^{-1}([0, +\infty[)$$

où pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $f_X : M \mapsto X^T M X$ est continue car linéaire sur un espace de dimension finie, donc $f_X^{-1}([0, +\infty[)$ est fermée, donc $\mathcal{P}$ l'est donc $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'est.

On peut aussi prendre une suite $(M_n)_n$ convergente vers M de matrices de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et, par continuité de la transposition et des f_X , passer à la limite dans $M_n^T = M_n$ et $X^T M_n X \geq 0$ pour en déduire que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par densité, on a une suite (A_n) de matrices inversibles telles que $A_n \rightarrow A$. On peut donc trouver des suites (Q_n) et (S_n) de matrices respectivement orthogonales et symétriques telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = Q_n S_n$.

Par compacité de $\mathcal{O}(n)$, on a une extractrice φ telle que $Q_{\varphi(n)} \rightarrow Q \in \mathcal{O}(n)$.

Alors $S_{\varphi(n)} = Q_{\varphi(n)}^{-1} A_{\varphi(n)} \rightarrow S = Q^{-1} A$ (la continuité de $M \mapsto M^{-1}$ vient de la formule de la comatrice) et comme $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé, $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Finalement, $A = QS$ avec $Q \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

5 Formules variationnelles et rayon spectral

Soit E est un espace euclidien, $(\cdot | \cdot)$ son produit scalaire, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, $|||\cdot|||$ la norme de $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

1. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $x \mapsto \frac{(x | u(x))}{\|x\|^2}$ atteint sur $E \setminus \{0_E\}$ un minimum et un maximum qui sont respectivement $\min(\text{Sp } u)$ et $\max(\text{Sp } u)$. Traduction matricielle ?
2. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $|||u||| = |||u^*|||$.
Le **rayon spectral** de $u \in \mathcal{L}(E)$ est, par définition, $\rho(u) = \max_{\lambda \in \text{Sp } u} |\lambda|$.
3. Si $u \in \mathcal{S}(E)$, montrer que $\rho(u) = |||u|||$.
4. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $|||u|||^2 = |||u^* \circ u||| = \rho(u^* \circ u)$.

Solution de 5 : Formules variationnelles et rayon spectral

1. Par théorème spectral, on a une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivement.

$$\text{Si } x = \sum_{k=1}^n x_k e_k,$$

$$(x | u(x)) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \in [\min(\text{Sp } u) \|x\|^2, \max(\text{Sp } u) \|x\|^2],$$

les bornes étant atteinte pour des vecteurs e_i d'indice correspondant respectivement à la plus petite et à la plus grande valeur propre.

Matriciellement, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto \frac{X^T A X}{\|X\|^2}$ atteint sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ un minimum et un maximum valant respectivement $\min(\text{Sp } A)$ et $\max(\text{Sp } A)$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E$, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|||u(x)|||^2 = (u(x) | u(x)) = (x | u^* \circ u(x)) \leq \|u^* \circ u(x)\| \|x\| \leq |||u^* \circ u||| \cdot \|x\|^2 \leq |||u^*||| \cdot |||u||| \cdot \|x\|^2$$

car $|||\cdot|||$ est une norme d'algèbre. Donc $|||u|||^2 \leq |||u^*||| \cdot |||u|||$.

Alors soit $|||u||| = 0$ et alors $u = 0_{\mathcal{L}(E)} = u^*$ et donc $|||u||| = 0 = |||u^*|||$, soit $|||u||| \neq 0$ et alors $|||u||| \leq |||u^*|||$. Puis, symétriquement, $|||u^*||| \leq |||(u^*)^*||| = |||u|||$.

Finalement, dans tous les cas, $|||u^*||| = |||u|||$.

3. On suppose $u \in \mathcal{S}(E)$. Comme dans la question 1, pour tout $x \in E$,

$$|||u(x)|||^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 x_k^2 \leq (\rho(u))^2 \|x\|^2$$

atteint pour x vecteur propre associé à une valeur propre de valeur absolue égale à $\rho(u)$.

Donc $|||u||| = |\rho(u)| = \rho(u) \geq 0$.

4. On a déjà $u^* \circ u \in \mathcal{S}(E)$. D'après la question précédente, et comme la norme subordonnée est une norme d'algèbre,

$$\rho(u^* \circ u) = |||u^* \circ u||| \leq |||u^*||| \times |||u||| = |||u|||^2.$$

Puis, comme dans la question 2, pour tout $x \in E$,

$$|||u(x)|||^2 = (u(x) | u(x)) = (x | u^* \circ u(x)) \leq \|x\| \cdot \|u^* \circ u(x)\| \leq |||u^* \circ u||| \cdot \|x\|^2$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz et définition de la norme subordonnée, donc $|||u|||^2 \leq |||u^* \circ u|||$.

Finalement, $|||u|||^2 = |||u^* \circ u||| = \rho(u^* \circ u)$.