

Programme de colle – MPI

1. Topologie (Limite, continuité, compacité, connexité par arcs)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Étude locale d'une application, continuité Limite en un point adhérent à une partie A . Caractérisation séquentielle. Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle. Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues. Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue. Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\ x\ $ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle. Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales. Caractère 1-lipschitzien de l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie non vide de E .
f) Applications linéaires et multilinéaires continues Critère de continuité d'une application linéaire entre deux espaces normés : $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E, \ u(x)\ \leq C\ x\ .$ Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue. Critère de continuité des applications multilinéaires.	Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$. Notations $\ u\ $, $\ u\ _{op}$. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Adaptation aux matrices. La démonstration n'est pas exigible.
g) Parties compactes d'un espace normé Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Un fermé relatif d'une partie compacte est compact. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Produit d'une famille finie de compacts.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.
h) Applications continues sur une partie compacte Image continue d'une partie compacte. Théorème de Heine. Théorème des bornes atteintes pour une application numérique définie et continue sur un compact non vide.	On souligne l'importance de la compacité dans les problèmes d'optimisation, notamment en mettant en évidence des situations où l'on prouve l'existence d'un extremum à l'aide d'une restriction à un compact.
i) Connexité par arcs Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points ; partie connexe par arcs. Cas des parties convexes, des parties étoilées. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Image continue d'une partie connexe par arcs.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E . Les classes sont les composantes connexes par arcs. Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.
j) Espaces vectoriels normés de dimension finie Équivalence des normes en dimension finie. Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.	La démonstration n'est pas exigible. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.
Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.
Si E est de dimension finie, $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$.
Continuité des applications polynomiales définies sur un espace normé de dimension finie, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Exemples : déterminant, produit matriciel, composition d'applications linéaires.

Étude sur quelques exemples de la limite et de la continuité d'une fonction réelle de deux variables réelles : celles des applications partielles sont nécessaires mais non suffisantes. Changement de variable (par composition) par exemple en polaire.

2. Topologie matricielle

Rien n'est officiellement au programme, mais les notions suivantes ont été travaillées en TD et peuvent donner lieu à des exercices. Tous ces résultats sont à démontrer pour être utilisés.

- Normes matricielles usuelles, normes subordonnées associées.
- Continuité de $\det$, Com (application : coefficient de degré 1 de χ_M), $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1}$, $M \mapsto \chi_M$.
- Non continuité du rang, de $M \mapsto \pi_M$.
- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (exemple d'application : théorème de Cayley-Hamilton), absence de densité en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{O}(n)$ est compact.
- Caractère ouvert et/ou fermé de l'ensemble des matrices de rang p fixé.
- Connexité par arcs ou non de l'ensemble des matrices inversibles dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, des matrices diagonalisables, de $\mathcal{O}(n)$.

3. Endomorphismes des espaces euclidiens

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Adjoint d'un endomorphisme Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien. Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint. Matrice de l'adjoint en base orthonormée. Si le sous-espace F est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .	Notation u^* .
b) Matrices orthogonales Matrice orthogonale : définition par ${}^tA A = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes. Groupe orthogonal. Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables. Notations $O_n(\mathbb{R})$, $O(n)$. Notations $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$. Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E , égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle : définition par la conservation des normes.	Par définition, une isométrie vectorielle est linéaire. On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal » tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».
Exemples : symétrie orthogonale, réflexion. Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$. Groupe orthogonal. Déterminant d'une isométrie. Isométrie directe, indirecte. Groupe spécial orthogonal.	Notation $O(E)$. Notation $SO(E)$.
d) Isométries vectorielles en dimension 2	
Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2. Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Morphisme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $SO_2(\mathbb{R})$: surjectivité et noyau. Classification des isométries d'un plan euclidien.	Isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $SO_2(\mathbb{R})$. Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
e) Réduction des isométries	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Réduction d'une isométrie en base orthonormée. Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	Interprétation matricielle. La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». La pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme.
f) Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien	
Endomorphisme autoadjoint : définition par $u^* = u$. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». Notation $\mathcal{S}(E)$.
Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints. Théorème spectral : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E , alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u .	Interprétation matricielle : une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.
g) Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs	
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E), \mathcal{S}^{++}(E)$. Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Pas de produit vectoriel au programme de maths... Mais il est au programme en physique ! On peut l'utiliser pour reconnaître le signe d'une matrice orthogonale ou encore pour compléter deux vecteurs orthogonaux en une base orthogonale...

Les étudiants savent trouver l'axe et l'angle d'une rotation en dimension 3.

Semaine prochaine : Fonctions vectorielles, calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$.

4. Questions de cours

- Les questions de cours (i) à (iv) sont posables à tout le monde.
- Les questions de cours muni d'un astérisque * ne sont posables qu'aux trinômes 6, 7.
- Les membres de ces trois trinômes doivent savoir faire tous les exercices CCINP mais ne seront éventuellement interrogés que sur le 36 et le 78.

- $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipshitzienne.
- Image continue d'un compact et théorème des bornes atteintes.
- Connexes par arcs de $\mathbb{R}$, image continue d'un connexe par arcs (application : TVI).
- Les différentes propriétés de l'adjoint : linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité, matrice en BON, adjoint et sous-espace stable.
- Exercices CCINP 13, 35, 36, 38, 63, 66, 68, 78.**
- * Exercice classique : topologie matricielle**
Justifier rapidement trois à quatre points parmi les cinq points suivants.
 - Densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 - Densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (donc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
 - Continuité de $\det$, de $A \mapsto \chi_A$, de $A \mapsto \text{Com } A$, de $A \mapsto A^{-1}$.
 - $\mathcal{O}(n)$ est compact et n'est pas connexe par arcs.
 - $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas.
- * Exercice classique : décomposition QR et inégalité de Hadamard**
 - Montrer que si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $Q \in \mathcal{O}(n)$ et une matrice $R \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = QR$.
 - Connaissant une telle décomposition, les déterminer toutes.
 - On veut montrer l'**inégalité de Hadamard** : si M est une matrice carrée réelle, $(C_1, \dots, C_n)$ la famille de ses vecteurs colonnes, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors
$$|\det M| \leq \|C_1\| \cdots \|C_n\|$$
 - Montrer l'inégalité lorsque M n'est pas inversible.
 - Montrer l'inégalité lorsque M est inversible en utilisant une décomposition QR .
- * Exercice classique : théorème des compacts emboîtés et propriété de Borel Lebesgue**
Les deux questions sont indépendantes.
Soit K une partie compacte non vide d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$.
 - Montrer que si (F_n) une suite décroissante de parties fermées de K (donc compactes) et non vides, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.
 - On veut montrer que K vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : « De tout recouvrement de K par des ouverts : $K \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, on peut extraire un recouvrement fini : $K \subset \bigcup_{i \in J} \mathcal{O}_i$ où J partie finie de I . »
 - Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir K par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε , c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.
 - On suppose que $K \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ où les $\mathcal{O}_i$ sont des ouverts. Montrer qu'on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$,
$$\exists i \in I, \quad B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}_i.$$

En déduire que K vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

(ix) ✱ **Exercice classique : Racines carrées et décomposition polaire**

- (a) **Racine carrée** : Soit u un endomorphisme autoadjoint positif.
- (a) Établir l'existence d'un endomorphisme h symétrique positif tel que $h^2 = u$. Traduction matricielle ?
- (b) Démontrer l'unicité de h . Que peut-on dire de h si u est défini positif ?
- (b) **Décomposition polaire** : Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(Q, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.
- (c) Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est fermé puis étendre le résultat d'existence de la décomposition polaire à toute matrice carrée réelle (mais sans unicité) en utilisant sans les prouver les résultats classiques de densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de compacité de $\mathcal{O}(n)$.

(x) ✱ **Exercice classique : Formules variationnelles et rayon spectral**

Soit E est un espace euclidien, $(\cdot | \cdot)$ son produit scalaire, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, $\|\cdot\|$ la norme de $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

1. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $x \mapsto \frac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$ atteint sur $E \setminus \{0_E\}$ un minimum et un maximum qui sont respectivement $\min(\text{Sp } u)$ et $\max(\text{Sp } u)$. Traduction matricielle ?
2. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\|u\| = \|u^*\|$.
- Le **rayon spectral** de $u \in \mathcal{L}(E)$ est, par définition, $\rho(u) = \max_{\lambda \in \text{Sp } u} |\lambda|$.
3. Si $u \in \mathcal{S}(E)$, montrer que $\rho(u) = \|u\|$.
4. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $\|u\|^2 = \|u^* \circ u\| = \rho(u^* \circ u)$.

5. Exercices CCINP

■ **CCINP 13**

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace. Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ de E par : $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^n |a_i|$.
- (a) Justifier que $S(0, 1) = \{P \in \mathbb{R}[X], \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E .
- (b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n entiers naturels distincts. $S(0, 1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

■ **CCINP 35** : E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E .
On considère les propositions suivantes :

P1. f est continue en a .

P2. Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, alors $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$.

Prouver que les propositions **P1** et **P2** sont équivalentes.

2. Soit A une partie dense dans E , et soient f et g deux applications continues de E dans F .
Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

■ **CCINP 36** : Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1. f est continue sur E .

P2. f est continue en 0_E .

P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$.
Démontrer que φ est linéaire et continue.

■ **CCINP 38** :

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par : $\forall f \in E, \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

Soit $u : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ f & \longmapsto u(f) = g \end{cases}$ avec $\forall x \in [0, 1], g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

On admet que u est un endomorphisme de E .

Prouver que u est continue et calculer $\|u\|$.

Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = ne^{-nt}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n -uplet **non nul, fixé**.

Soit $u : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i \end{cases}$.

- (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

(b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|\cdot\|_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

Calculer $\|u\|$.

(c) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|\cdot\|_\infty$ où $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$.

Calculer $\|u\|$.

3. Déterminer un espace vectoriel E , une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

■ **CCINP 63 : endomorphismes normaux**

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$. On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Pour tout endomorphisme u de E , on note u^* l'adjoint de u .

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
- (i) $u \circ u^* = u^* \circ u$.
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
- (iii) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

■ **CCINP 66** :

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

■ **CCINP 68** : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de trois manières :
 - (a) sans calcul,
 - (b) en déterminant le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres,
 - (c) en calculant A^2 .
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A .
Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale.

■ **CCINP 78**

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E .

On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E , tel que

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

- (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
 - (b) Démontrer que u est bijectif.
2. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E . C'est-à-dire

$$\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E), \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|\}.$$

Démontrer que $\mathcal{O}(E)$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .