1 Suites de Cauchy - Espaces complets

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, une suite u est dite **de Cauchy** lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, p \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow \left\|u_{n+p} - u_n\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Cela se traduit aussi par $u_p - u_q \xrightarrow[p,\ q \to +\infty]{} 0$.

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

Lorsque la réciproque est vraie, on dit que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est **complet**.

2. Montrer que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est complet.
3. Montrer que $(\mathscr{C}([0,1], \mathbb{K}), N_1)$ n'est pas complet.
   On pourra introduire les fonctions définies par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \quad \text{pour } x \in [0,1] \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

Solution de 1 : Suites de Cauchy - Espaces complets

1. Soient $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite convergente et ℓ sa limite. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow \|\ell - u_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $n \geqslant N$ et $p \in \mathbb{N}$, on a conjointement

$$\|\ell - u_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left\|\ell - u_{n+p}\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$\left\|u_{n+p} - u_n\right\| \leqslant \left\|u_{n+p} - \ell\right\| + \|\ell - u_n\| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est donc de Cauchy.

2. On montre qu'une suite de Cauchy est bornée : en effet, avec $\varepsilon = 1$, on a un rang N à partir duquel $\forall p \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+p} - u_n\right| \leqslant 1$. En particulier, pour $n = N$, $\forall p \in \mathbb{N},\ \left|u_{p+N} - u_N\right| \leqslant 1$ donc $\forall n \geqslant N,\ |u_n| \leqslant 1 + |u_N|$.
   Par théorème de Bolzano-Weierstraß valable dans $\mathbb{K}$, on en extrait une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ convergente vers ℓ.
   Mais $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_n - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - \ell$.
   Comme u est de Cauchy, $u_n - u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ en prenant $p = \varphi(n) - n \in \mathbb{N}$ dans la définition des suites de Cauchy.
   Cela conclut la convergence de u vers ℓ.
3. Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} N_1\left(f_{n+p} - f_n\right) &= \int_0^1 \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k}\right| \mathrm{d}x = \sum_{k=n+1}^{n+p} \int_0^1 \frac{x^k}{k}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \leqslant \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Pour n assez grand, cette quantité, uniforme en p, est inférieure à n'importe quel ε préalablement choisi : la suite $\left(f_n\right)_{n \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy pour N_1.

Par l'absurde supposons que la suite $\left(f_n\right)_{n \geqslant 1}$ converge pour la norme N_1 et posons $f \in E$ sa limite. On a donc

$$N_1\left(f_n - f\right) = \int_0^1 \left|f_n - f\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Parallèlement, par le théorème de convergence dominée, on montre

$$\int_0^1 \left|f_n - f\right| = \int_0^1 \left|f_n(x) - f(x)\right| \mathrm{d}x \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 |f(x) + \ln(1-x)|\,\mathrm{d}x.$$

En effet, par les séries entières de référence,

H1 $\forall x \in [0,1[,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |-\ln(1-x) - f(x)|$

H2 Toutes les fonctions sont continues par morceaux sur $[0,1[$.

H3

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \left|f_n(x)\right| + |f(x)| \leqslant -\ln(1-x) + |f(x)| = \varphi(x)$$

avec $\varphi : [0,1[\to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur $[0,1[$.

Par unicité de la limite,

$$\int_0^1 |f(x) + \ln(1-x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

Par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive, on obtient

$$\forall x \in [0,1[,\ f(x) = -\ln(1-x).$$

Or f est continue en 1 tandis que $\ln(1-x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 1^-. C'est absurde. La suite $\left(f_n\right)_{n \geqslant 1}$ ne converge pas pour la norme N_1.