

## Programme de colle – MPI

# 1. Espaces vectoriels normés

Extrait du programme officiel :

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme. Il en est de même des notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach.

Dans toute cette section,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Normes et espaces vectoriels normés

Norme sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé.  
Distance associée à une norme.  
Boules fermées, boules ouvertes, sphères.  
Convexité des boules.  
Parties, suites, fonctions bornées.  
Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.  
Normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbb{K}^n$ .  
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.

Produit fini d'espaces vectoriels normés.

Vecteurs unitaires.

Inégalité triangulaire.  
On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.

Notation  $\|\cdot\|_\infty$ .

Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité  $\sup(kA) = k \sup(A)$  pour  $A$  partie non vide de  $\mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{R}^+$ .  
Notations  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$ .

#### b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Suites extraites, valeurs d'adhérence.

Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

#### c) Comparaison des normes

Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.

Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.

#### d) Topologie d'un espace normé

Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie.

Voisinage d'un point.

Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie.

Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert.

Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.

### CONTENUS

Point intérieur, point adhérent.

Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.  
Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense.

Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

Si  $A$  est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de  $A$ . Voisinage relatif.

Par définition, une partie  $U$  de  $A$  est un ouvert relatif si  $U$  est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec  $A$  d'un ouvert de  $E$ .

Les fermés relatifs sont par définition les complémentaires dans  $A$  des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle. Caractérisation comme intersection avec  $A$  d'un fermé de  $E$ .

#### i) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes en dimension finie.  
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.

La démonstration n'est pas exigible.  
La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

**Semaine prochaine** : Continuité, compacité, connexité par arcs.

## 2. Questions de cours

Les membres du groupe \* doivent savoir faire les exercices CCINP mais ne seront pas interrogés dessus.

- (i) Normes usuelles sur  $\mathbb{K}^n$ .
- (ii) Norme  $N_\infty$  sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur un ensemble  $X$  non vide à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .  
Normes  $N_1$  et  $N_2$  sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .
- (iii) Comparaisons (les 6) des normes usuelles sur  $\mathbb{K}^n$ , avec au moins un cas d'égalité pour chaque comparaison.
- (iv) Toutes les définitions concernant la topologie.
- (v) **Exercices CCINP 34, 37, 44, 45.**
- (vi) \* 1-lipschitzianité de la fonction distance à une partie  $A$  dans un espace vectoriel normé.  
L'intérieur est le plus grand ouvert contenu dans la partie.
- (vii) \* Comparaisons des normes usuelles sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .
- (viii) \* L'adhérence est le plus petit fermé contenant la partie.  
L'intérieur est le plus grand ouvert contenu dans la partie.
- (ix) \* Caractérisations séquentielles des fermés et des points adhérents.

### (x) \* Suites de Cauchy, espaces complets

Dans un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ , une suite  $u$  est dite **de Cauchy** lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon.$$

Cela se traduit aussi par  $u_p - u_q \xrightarrow[p, q \rightarrow +\infty]{} 0$ .

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

Lorsque la réciproque est vraie, on dit que l'espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est **complet**.

2. Montrer que  $(\mathbb{K}, |\cdot|)$  est complet.
3. Montrer que  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K}), N_1)$  n'est pas complet.

On pourra s'intéresser à  $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ .

## 3. Exercices CCINP

### ■ CCINP 34 : Soit $A$ une partie non vide d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé $E$ .

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à  $A$ , en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que :  $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que,  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$  et  $x_n \rightarrow x$ .
3. Démontrer que, si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $\bar{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
4. Soit  $B$  une autre partie non vide de  $E$ .

Montrer que  $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$ .

### ■ CCINP 37 : On note $E$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ .

On pose :  $\forall f \in E, N_\infty(f) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|$  et  $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

1. (a) Démontrer que  $N_\infty$  et  $N_1$  sont deux normes sur  $E$ .  
(b) Démontrer qu'il existe  $k > 0$  tel que, pour tout  $f$  de  $E$ ,  $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$ .  
(c) Démontrer que tout ouvert pour la norme  $N_1$  est un ouvert pour la norme  $N_\infty$ .
2. Démontrer que les normes  $N_1$  et  $N_\infty$  ne sont pas équivalentes.

### ■ CCINP 44 : Soit $E$ un espace vectoriel normé. Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $E$ .

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.  
(b) Montrer que :  $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$ .
2. Montrer que :  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ .  
**Remarque :** une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que :  $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ .  
(b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre  $E = \mathbb{R}$ ).

### ■ CCINP 45 : Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ . On note  $\bar{A}$  l'adhérence de  $A$ .

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de  $\bar{A}$ .  
(b) Prouver que, si  $A$  est convexe, alors  $\bar{A}$  est convexe.
2. On pose :  $\forall x \in E, d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ .  
(a) Soit  $x \in E$ . Prouver que  $d_A(x) = 0 \implies x \in \bar{A}$ .  
(b) On suppose que  $A$  est fermée et que

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1-t)y) \leq t d_A(x) + (1-t)d_A(y).$$

Prouver que  $A$  est convexe.