Composition de Mathématiques B, Filière MP
(X)

Présentation du sujet

Cette épreuve portait sur la fonction Gamma, définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Dans l'ensemble, l'énoncé guidait le candidat pas à pas et permettait d'évaluer l'acquisition des réflexes fondamentaux de l'analyse réelle. Les parties étaient très largement indépendantes les unes des autres et les résultats des calculs intermédiaires étaient fournis par le sujet.

L'objet de la première partie était d'établir une formule de Stirling précisée et se concluait sur un développement asymptotique à deux termes :

$$\Gamma(x) = e^{-x} x^x \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{12x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Après avoir rapidement fait connaissance avec la fonction Γ à la question 1, le cœur de cette partie consistait à la question 2 à obtenir le développement asymptotique de

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-t/x} f(t) dt$$

lorsque $x \to +\infty$ à partir du développement asymptotique en puissances de x de f à l'origine. Comme on peut s'y attendre, il fallait découper l'intervalle d'étude avec soin et contrôler le reste correctement en utilisant la croissance polynomiale de f sur $[1, +\infty[$. La question 3 commençait par l'étude de la fonction $\phi(s) = s - \ln(1 + s)$ pour obtenir le développement limité à l'origine de chacune des branches de la fonction réciproque ϕ^{-1}. Pour conclure la partie I, le candidat devait intégrer les résultats intermédiaires déjà obtenus dans la rédaction d'une preuve complète. La vérification des hypothèses était bien entendu cruciale.

La fonction Γ est singulière en $x = 0$. La seconde partie consistait à calculer l'intégrale correspondante sur $[A, +\infty)$ pour $A > 0$. Précisément, on devait montrer que

$$\int_{10}^\infty e^{-t} t^{-1} dt \simeq \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \frac{2!}{10^3} - \frac{3!}{10^4}\right) e^{-10}$$

à 0.3% près. L'originalité de ce résultat est que la série $\sum (-1)^{k-1} (k-1)! x^k$ dont les premiers termes apparaissent dans cette formule est en fait de rayon nul [1]. Dans cette

1. Le lecteur intéressé peut consulter un texte de Jean-Pierre Ramis aux journées X-UPS 1991 « séries divergentes et théories asymptotiques » disponible ici `http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups91.pdf`

partie, le candidat était amené à utiliser des techniques standard dans l'étude de séries. Il ne s'agissait pas d'appliquer des théorèmes généraux, mais au contraire d'utiliser l'idée de leurs démonstrations (par exemple l'idée derrière la convergence des séries alternées) pour l'adapter au problème posé. Cette partie du sujet vérifiait le degré de compréhension et d'apprentissage du cours.

La partie III visait à établir la densité des polynômes trigonométriques en deux variables dans l'ensemble des fonctions continues et doublement 1-périodiques sur $\mathbb{R}^2$. La méthode consistait à transiter par le sous-espace des fonctions qui s'écrivent comme combinaison linéaire de fonctions périodiques à variables séparées. Le résultat de densité correspondant en dimension 1 était admis par l'énoncé. Cette partie vérifiait la capacité du candidat à absorber rapidement une succession de définitions et de notations puis à s'exprimer clairement en les utilisant. Il était indispensable d'avoir compris la notion de norme uniforme.

Enfin, la partie IV était consacrée à l'étude de quelques propriétés qualitatives des trajectoires dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^2$ d'une équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} F'(t) = f(\alpha(t)) & F(0) = 0 \in \mathbb{C} \\ \alpha'(t) = \omega + xg(\alpha(t)) & \alpha(0) = (0,0) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ des données 1-périodiques, f étant de moyenne nulle, et $\omega \in \mathbb{R}^2$ donné. Lorsque $x = 0$, l'originalité de ce système est que si les composantes de ω sont en proportion rationnelle, il est possible de choisir f telle que $F(t) = t$. Par contre, si les composantes de ω sont en proportion irrationnelle alors $F(t) = o(t)$ en général voire $F(t) = O(1)$ dans certains cas. Cette dynamique s'inscrit dans le cadre plus général des systèmes ergodiques sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. La fin du sujet visait à obtenir un développement asymptotique de $\alpha(t)$ qui soit uniforme sur un intervalle de temps fixe $[0, T]$ lorsque $x \to 0$. Il était nécessaire d'avoir traité ou au moins admis les résultats de la partie III pour pouvoir finir le sujet.

Indications sur le barème et statistiques générales

Les résultats de l'épreuve sont en accord avec les directives statistiques générales du concours, ce qui garantit l'influence respective des épreuves.

$0 \leq \mathrm{N} < 4$	259	17,26 %
$4 \leq \mathrm{N} < 8$	707	47,10 %
$8 \leq \mathrm{N} < 12$	390	25,98 %
$12 \leq \mathrm{N} < 16$	120	7,99 %
$16 \leq \mathrm{N} \leq 20$	25	1,67 %
Total	1501	100 %
Nombre de copies : 1501		
Note moyenne : 7,08		
Écart-type : 3,47		

L'histogramme de répartition des notes atteste aussi de l'équité du traitement des copies indépendamment du correcteur (chacun est représenté avec une couleur différente).

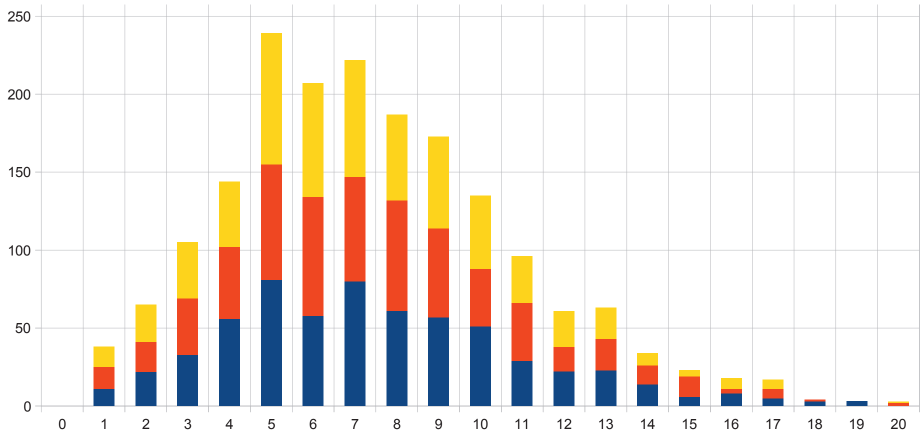

Fig.1 – En abscisse la note et en ordonnée le nombre de candidats ayant obtenu cette note.

Le barème a été conçu selon trois objectifs : séparer les candidats dans la zone d'admissibilité, éviter les effets de seuil et minimiser les points de "grappillage".

En traitant toutes les questions correctement jusqu'à la 3c incluse, un candidat pouvait obtenir 10.2 points sur 20. En traitant toutes les questions correctement jusqu'à la 7a (c'est à dire essentiellement les parties I et II), un candidat s'assurait une note supérieure à 16 points. Un candidat ayant traité toutes les questions jusque 3c puis ayant traité correctement l'intégralité de la partie III (questions 8 à 11) sans aborder la partie II aurait obtenu 14.8 points.

Commentaires sur les résultats

Une seule copie a traité correctement 86% du sujet. Contrairement aux années précédentes où la quasi totalité du sujet était traitée par un petit noyau de candidats, cette année, le peloton de tête n'a traité en général que 70% du sujet. Nous avons quand même décidé d'attribuer la note maximale à 2 candidats et une note supérieure à 18/20 à 7 candidats.

Seuls 29 candidats (moins de 1,6% des candidats **français ou étrangers**, dont 25 français et 4 étrangers) ont obtenu une note supérieure ou égale à 16/20. Ce faible nombre de bonnes copies est surprenant et très inquiétant quand au sérieux de la préparation des candidats. Le sujet de cette année abordait l'ensemble des notions standard d'analyse (études d'intégrales, études de séries, limites uniformes de suites de fonctions, équations différentielles) et le barème permettait d'atteindre cette note de plusieurs façons différentes.

La figure 2 illustre le profil de réussite aux questions 1 à 3c des candidats ayant obtenu une note supérieure ou égale à 16/20. On constate ainsi que 20% de ces 29 meilleurs candidats n'ont traité correctement que 70% des questions élémentaires (jusqu'à la question 3c, il suffisait d'avoir acquis les bons réflexes en analyse ; aucun recul sur le sujet n'était vraiment nécessaire)... Ce constat est alarmant !

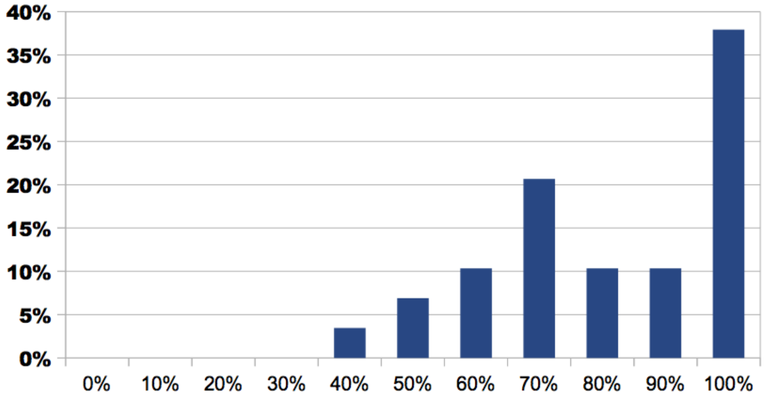

Fig. 2 – La réussite (normalisée) aux questions 1 à 3c est représentée en abscisse et l'effectif (normalisé) parmi les 29 candidats ayant obtenu 16/20 ou plus, en ordonnée.

La note 9,4/20 sépare les 400 meilleurs candidats (**français ou étranger**) du reste. Le profil de réussite de ces 400 candidats, pour chaque partie du sujet, est donné dans l'histogramme de la figure 3. Dans la partie I, on constate que 62% des candidats de cet échantillon ont réussi entre 40% et 70% des questions ; cependant, une première séparation est visible puisque 25% ont réussi plus de 70% des questions de cette partie. Les parties II et III sont visiblement beaucoup plus discriminantes puisque l'histogramme "s'étale". La partie IV n'a presque jamais été abordée sérieusement puisque plus de 80% de cet échantillon de copies réussit moins de 10% de la partie IV. Le temps consacré à ce début de partie IV aurait été vraisemblablement mieux employé à améliorer des réponses en parties II et III.

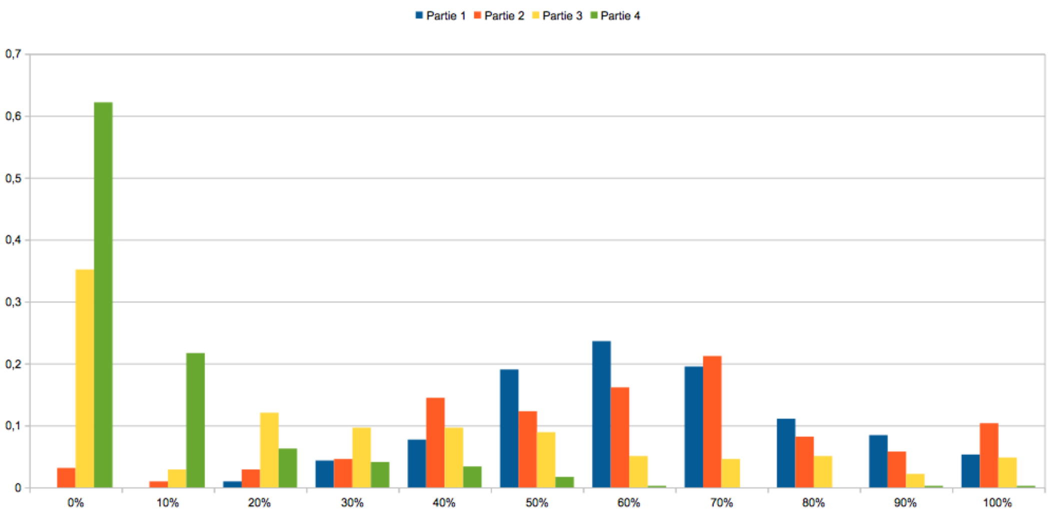

Fig. 3 – La réussite (normalisée) à chaque partie est représentée en abscisse et l'effectif (normalisé) parmi ceux ayant obtenu 9.4/20 ou plus, en ordonnée.

Examen détaillé des questions

Première partie

Question 1a La première question comportait trois points (justifier que Γ est bien définie, la formule de récurrence et le lien avec la factorielle). Environ 30% des candidats n'ont pas obtenu l'intégralité des points à la question 1. Il est dommage de commencer une copie en oubliant un morceau de la question...

Dans la justification de convergence, il convient de rappeler que $e^{-t}t^a$ n'est pas équivalent à e^{-t} ! On aurait aussi pu préciser la continuité par morceaux même si l'oubli n'a pas été sanctionné.

Question 1b Le changement de variable $t = y(s+1)$ a été trouvé par 70% des candidats et 90% des candidats ayant obtenu la moyenne. Nous attirons à nouveau l'attention des candidats qu'il ne sert à rien « d'avancer à l'aveugle » dans un sujet dont vous n'avez pas maitrisé les questions de base.

Question 2a À nouveau, la question comporte trois points (justification d'intégrabilité et deux formules). C'est la première question discriminante et elle pèse environ 6% dans le barème ; elle représente donc potentiellement plus de 1 point sur la note finale. Le tiers des copies obtient au moins la moitié des points, le reste se scinde entre aucun point ou seulement le quart. À nouveau, il est essentiel de s'appliquer dans cette question pour pouvoir creuser l'écart avec le reste des candidats et dépasser la barre d'admissibilité.

Sur le fond, les correcteurs constatent que les théorèmes d'intégration des petits o ne sont pas compris. Pire, de nombreux candidats n'ont pas su lire l'énoncé correctement et pensent, à tord, que le développement asymptotique de f en $t = 0$ peut leur apprendre quelque chose sur l'intégrale de f sur l'intervalle $[\delta, +\infty)$! De trop nombreux candidats pensent aussi qu'en démontrant la continuité sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \int_\delta^{+\infty} e^{-t/x}t^\alpha x^{-n}dt$, on en déduit sa limite nulle en 0 sans penser au contre-exemple évident à ce type de conclusion hâtive : $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$...

Question 2b On utilise le développement à l'origine de f pour affirmer l'existence de $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \delta]$, on ait la majoration $|\rho_N(t)| \leq \varepsilon t^{(N+\lambda-\mu)/\mu}$. Cette question est un échec pour 80% des candidats, mais elle est réussie par 60% des candidats ayant obtenu la moyenne.

Question 2c C'est une question de rédaction pour vérifier que le candidat sait faire la synthèse de 2a et 2b. Le point important est de savoir remettre les quantificateurs dans l'ordre : d'abord $\varepsilon > 0$ arbitraire, puis le choix de δ par 2b, puis le contrôle du reste par 2a. Seul le tiers des candidats y arrive.

Question 2d La difficulté d'une question « Montrer que... » est que le candidat doit produire un calcul honnête et convainquant conduisant au résultat demandé. Il est recommandé de faire une phrase pour indiquer que vous faites un changement de variable $t = x\tau$ dans le terme principal et qu'on applique 2c pour le reste. À nouveau, seul le tiers des candidats et les deux-tiers des candidats ayant obtenu la moyenne obtiennent tous les points.

Question 3a L'étude de fonction $\phi(s) = s - \ln(1 + s)$ est globalement décevante. Seul un candidat sur deux s'en sort correctement et à peine 60% des candidats ayant obtenu la moyenne obtiennent tous les points. Il est hors de question d'obtenir des points à la requête « Tracer le graphe » sans effectivement faire un dessin ! Dans leurs graphiques, les candidats confondent asymptote et direction asymptotique ; il est vrai que $\phi(s) \sim s$ à l'infini, pourtant le graphe s'éloigne infiniment loin de la diagonale puisque $\ln(1 + s) \to +\infty$. Ne pas avoir pris conscience de ce phénomène avant le jour du concours n'est tout simplement pas sérieux. La monotonie n'est pas une justification suffisante pour obtenir une bijection ; une référence à la continuité était indispensable. Enfin, dériver ϕ pour en dresser le tableau de variation sans préciser sa régularité marque aussi un manque de rigueur élémentaire.

Question 3b Une question « grapillage » par excellence ; 85% des candidats connaissent le développement en série de $\ln(1 + s)$ et rappellent que le rayon de convergence est 1. Le barème assure donc que l'enjeu de cette question ne dépasse pas 1/10-ème de point.

Question 3c La composition des développements limités est un art en voie de disparition. À nouveau, puisque le résultat est donné dans l'énoncé, un candidat ne peut pas se contenter de dire « par composition, on trouve... » ; on attend un calcul honnête et effectif de chaque coefficient. Le résultat concernant la dérivée a, presque toujours, été fantaisiste ! Les candidats ignorent qu'il est en général interdit de dériver terme à terme un développement limité ni sous quelles conditions on en a effectivement le droit. Au moins 70% des candidats et malheureusement 45% des candidats ayant obtenu la moyenne n'ont obtenu aucun point à cette question. Cette question très discriminante représentait 8% des points du barème.

Question 3d Il suffit de poser $s = \phi_\pm^{-1}(q)$ dans chaque intervalle de bijection ; le tiers des candidats grappillent ce point.

Question 3e Il s'agissait d'appliquer la question 2 avec $f = (\phi_+^{-1})' - (\phi_-^{-1})'$; la vérification des hypothèses était le point délicat, malheureusement trop souvent négligé. Seules 6% des copies obtiennent tous les points, mais cette proportion s'élève à un quart parmi les admissibles.

Deuxième partie

Question 4 Peu de copies (1/5 des candidats) traitent vraiment bien cette question classique. Il est choquant de constater que beaucoup ne savent pas dériver correctement une fonction composée simple ! Même parmi les admissibles, plus d'un candidat sur deux n'obtient pas la totalité des points à cette question...

Question 5 Il s'agit de faire une intégration par parties pour initialiser la récurrence sur N, puis une seconde pour montrer l'hérédité. Plus de 40% des candidats oublient l'une des deux.

Question 6a Une question d'application directe du cours pourtant bien discriminante : un tiers des candidats n'ont aucun point, un tiers ont la totalité. Les admissibles ont réussi.

Question 6b Une autre question élémentaire (avec l'indication), pourtant discriminante sur l'ensembles des copies et réussie globalement par les admissibles.

Question 6c Il suffit d'appliquer 6b à $R_{N+1}(x)$ en observant le lien habituel entre suite et série associée, c'est à dire que $R_N(x) = r_N(x) + R_{N+1}(x)$.

Question 6d Il s'agissait de comparer le préfacteur $(N+1)x$ à 1 pour déterminer le sens de variation. A nouveau, un tiers des copies et deux tiers des candidats ayant obtenu la moyenne s'en sortent correctement.

Question 7 On ne peut pas appliquer le théorème des séries alternées. Par contre, bien entendu, l'idée de sa démonstration est valable : tant que la suite $r_N(x)$ décroît en valeur absolue, la somme partielle reste du signe de $r_0(x) > 0$. Le numérateur de l'erreur relative est majoré par 6b et le dénominateur est minoré par $S_N(x)$. En simplifiant, on obtient le résultat annoncé. Seuls 8% des candidats et 25% des candidats ayant obtenu la moyenne traitent correctement cette question.

Question 7b Il s'agit de l'application numérique directe de la question précédente. La question est traitée par 25% des candidats et 40% des candidats ayant obtenu la moyenne, preuve que la recherche des points de grappillage a la vie dure... Les correcteurs ne peuvent que rappeler que le temps passé à dénicher ce genre de points dans le sujet serait bien mieux mis à profit en résolvant une seule "vraie" question !

Troisième partie

Question 8 Le point essentiel est de rédiger correctement comment on approche un produit $f(x)g(y)$; on ne peut pas faire l'économie de la décomposition :

$$f(x)g(y) - Q(x)R(y) = f(x)\left(g(y) - R(y)\right) + \left(f(x) - Q(x)\right)R(y).$$

Pourtant bien classique, ce début de partie III n'a été traité que par 18% des candidats et la moitié des candidats ayant obtenu la moyenne.

Question 9 Un petit dessin est le bienvenu, surtout quand l'énoncé invite à le faire ! Non seulement, le dessin facilite le raisonnement, mais il permet d'assurer le correcteur de la bonne compréhension du sujet. Pour avoir les points, il fallait vérifier impérativement la continuité ; à elle seule, la périodicité ne suffit pas pour justifier l'appartenance à $\mathcal{C}_{per}(\mathbb{R})$.

Question 10a La rédaction du calcul laissait souvent à désirer. On pouvait par exemple choisir un représentant de ℓ_1 modulo j parmi $\{0, ..., j-1\}$ et faire de même pour ℓ_2. Seuls 8% des candidats réussissent cette question.

Question 10b Un point essentiel à observer est que toute fonction périodique et continue est globalement uniformément continue. De nombreux candidats confondent barycentre et combinaison linéaire ; un barycentre est une combinaison linéaire dont la somme de tous les coefficients est égale à 1. Moins de 2% des candidats réussissent cette question et seulement 8% des candidats ayant obtenu la moyenne.

Question 11 Cette question de synthèse est bien traitée par ceux qui s'y sont intéressés.

Quatrième partie

Question 12 Une question très facile, traitée par 21% des candidats et 40% des candidats ayant obtenu la moyenne.

Question 13 Plus difficile, peu de candidats intéressés par la question ont pensé à l'hypothèse que f doit être de moyenne nulle. On trouvait ainsi que $f :\ \vartheta \mapsto e^{2i\pi k\cdot\vartheta}$ convient. Seuls 11% des candidats ayant obtenu la moyenne ont vu cette subtilité.

Question 14 Cette question n'a été traitée correctement seulement chez 2% des candidats ayant obtenu la moyenne. Les deux hypothèses non-résonnant et de moyenne nulle devaient intervenir ; on était aussi amené à réutiliser les résultats d'approximation de la partie III.

Question 15 Très peu abordée.