

PROBABILITÉS

Exercices vus en cours

Solution de 2 :

$\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$, probabilité uniforme.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap C).$$

$$\mathbb{P}(B \cup C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C).$$

Solution de 3 : Indicatrice d'Euler

$$1. \mathbb{P}(A_d) = \frac{|A_d|}{|\Omega|} = \frac{\frac{n}{d}}{n} = \frac{1}{d}.$$

$$2. (a) \text{ Si } p_1, \dots, p_\ell \text{ sont des diviseurs premiers deux à deux distincts de } n, \text{ comme ils sont premiers, } \bigcap_{j=1}^{\ell} A_{p_j} = A_{p_1 \cdots p_\ell}.$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\ell} A_{p_j}\right) = \mathbb{P}(A_{p_1 \cdots p_\ell}) = \frac{1}{p_1 \cdots p_\ell} = \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}(A_{p_j}).$$

$$(b) \text{ Les } \bar{A}_p \text{ sont aussi indépendants, } A = \bigcap_{p \in P} \bar{A}_p, \mathbb{P}(A) = \frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Solution de 4 :

■ Direct,

■ $A_1, \dots, A_p, \overline{A_{p+1}}, \dots, \overline{A_n}$ sont indépendants, par le premier point, sont indépendants $\bigcap_{i=1}^p A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^n \bar{A}_i = \overline{\bigcap_{i=p+1}^n A_i}$ donc sont indépendants

$$\bigcap_{i=1}^p A_i \text{ et } \bigcup_{i=p+1}^n A_i.$$

■ idem avec $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_p, \overline{A_{p+1}}, \dots, \bar{A}_n$.

Solution de 5 :

$\begin{array}{c} Y \\ \backslash X \end{array}$	1	2	3	4	5	6	loi de X
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	1/18	1/36	0	0	0	0	1/12
3	1/18	1/18	1/36	0	0	0	5/36
4	1/18	1/18	1/18	1/36	0	0	7/36
5	1/18	1/18	1/18	1/18	1/36	0	9/36
6	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/36	11/36
loi de Y	11/36	9/12	7/36	5/36	3/36	1/36	(1)

Solution de 6 :

$$\mathbb{P}(X_3 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

Donc $X_3 \sim \mathcal{U}(2)$ sur $\{-1, 1\}$.

Alors X_1, X_2, X_3 sont indépendantes deux à deux car $X_1 \perp X_2$,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 1)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = -1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(X_3 = 1)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_3 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_3 = -1)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_3 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(X_3 = 1)$$

Donc $X_1 \perp X_3$ et par symétrie, $X_2 \perp X_3$.

Pourtant, elles ne sont pas (mutuellement) indépendantes :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}.$$

Probabilités

Solution de 8 :

Si une telle probabilité existe, alors $1 = \mathbb{P}(N) = \lambda a_0$ avec $a_0 > 0$ vu les hypothèses donc $\lambda = \frac{1}{a_0}$.

Réciproquement, avec un tel lambda, si $A_n = \llbracket n, +\infty \llbracket$, alors $\mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n+1}) = \lambda(a_n - a_{n+1}) \geq 0$ et $\sum \lambda(a_n - a_{n+1})$ télescopique de somme $\lambda(a - 0 - 0) = 1$ d'où l'existence de $\mathbb{P}$ d'après la propriété du cours.

Solution de 9 :

On a bien que les $\frac{1}{n(n+1)}$ sont positifs et comment ils valent $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, ils sont sommables de somme (télescopique) $1 - 0 = 1$, d'où l'existence de $\mathbb{P}$.

$$\text{Puis on calcule } \mathbb{P}(2\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \ln 2.$$

Solution de 10 : Le problème des clés

Soit A_j l'événement « la clé n° j est la bonne ».

L'événement auquel on s'intéresse est alors $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.

D'après la formule des probabilités composées, sa probabilité est (en modélisant chaque situation par une probabilité uniforme)

$$\mathbb{P}(\overline{A_1}) \mathbb{P}(\overline{A_2} | \overline{A_1}) \dots \mathbb{P}(A_k | \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n-k+2}\right) \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

Logique ou non ?

Solution de 12 : Poker

$\Omega = \mathcal{P}_5(\mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ ensemble des cartes. $|\Omega| = \binom{52}{5} = 2\,598\,960$, proba uniforme.

- $|QFR| = 4$; $\mathbb{P}(QFR) = \frac{1}{649\,740}$.
- $|QF| = 4 \times 9 = 36$; $\mathbb{P}(QF) = \frac{3}{216\,580}$.
- $|A_4| = 13 \times 48 = 624$; $\mathbb{P}(A_4) = \frac{1}{4165}$.
- $|F| = 13 \times \binom{4}{1} \times 12 \times \binom{4}{2} = 3\,744$; $\mathbb{P}(F) = \frac{6}{4\,165}$.
- $|C| = 4 \times \binom{13}{5} - 40 = 5\,108$; $\mathbb{P}(C) = \frac{1\,277}{649\,740}$.
- $|Q| = 4^5 \times 10 - 40 = 10\,200$; $\mathbb{P}(Q) = \frac{5}{1\,274}$.
- $|A_3| = 13 \times \binom{4}{1} \times \binom{12}{2} \times 4^2 = 54\,912$; $\mathbb{P}(A_3) = \frac{88}{4\,165}$.
- $|PP| = \binom{13}{2} \times \binom{4}{2}^2 \times 44 = 123\,552$; $\mathbb{P}(PP) = \frac{198}{4\,165}$.
- $|A_2| = 13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3 = 1\,098\,240$; $\mathbb{P}(A_2) = \frac{352}{833}$.
- $|R| = \left(\binom{13}{5} - 10\right)(4^5 - 4) = 1\,302\,540$; $\mathbb{P}(R) = \frac{1\,277}{2\,548}$.

Solution de 13 :

Sur Ω l'ensemble des personnes testées, avec la probabilité uniforme. Soit M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

D'après les informations dont on dispose, $\mathbb{P}(T | M) = 0,99$ et $\mathbb{P}(T | \overline{M}) = 10^{-3}$, $\mathbb{P}(M) = 10^{-4}$. Donc

$$\mathbb{P}(M | T) = \frac{\mathbb{P}(T | M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T | M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T | \overline{M})\mathbb{P}(\overline{M})} = \frac{0,99 \cdot 10^{-5}}{0,99 \cdot 10^{-4} + (1 - 10^{-4})10^{-3}} \approx 9 \, \%.$$

Cela est dû au fait que il est rare que le test soit positif (le dénominateur vaut $\mathbb{P}(T)$) mais très très rare que l'on ait un malade ($\mathbb{P}(M)$ est très petit devant $\mathbb{P}(T)$). Proportionnellement, il y a beaucoup plus de non malades testés positifs.

Solution de 14 : Le problème de Monty Hall

Soit F_i l'événement « La Ferrari est derrière la porte numéro i ».

Supposons par exemple, que le candidat ait choisi la porte 1.

On a $\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_2) = \mathbb{P}(F_3) = \frac{1}{3}$. (F_1, F_2, F_3) est un système complet d'événements.

Soit A l'événement « l'animateur ouvre la porte numéro 3 ».

On cherche $\mathbb{P}(F_2 | A)$ pour savoir si le candidat a intérêt à changer de porte. (Si l'animateur ouvre la porte 2, le raisonnement est le même).

D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(F_2 | A) = \frac{\mathbb{P}(A | F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(A | F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(A | F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(A | F_3)\mathbb{P}(F_3)}$$

Or

- $\mathbb{P}(A | F_1) = \frac{1}{2}$ car les deux portes restantes contiennent une chèvre.
- $\mathbb{P}(A | F_2) = 1$ car si la Ferrari est derrière la deuxième porte, l'animateur ne peut ouvrir que la troisième porte.

- $\mathbb{P}(A \mid F_3) = 0$ car l'animateur ne dévoile pas la Ferrari.

Finalement, on trouve $\mathbb{P}(F_2 \mid A) = \frac{2}{3}$ et le candidat a deux fois plus de chances de gagner en changeant de porte qu'en la gardant.

En y réfléchissant bien, si on décide de changer de porte, on a au départ 2 chances de gagner (les portes où il y a les chèvres) et 1 de perdre, alors que si on décide de ne pas changer de portes, on a au départ 2 chances de perdre et 1 de gagner!

Solution de 15 : Distance la plus probable

$\Omega = \mathfrak{S}_n$, proba uniforme, $|\Omega| = n!$.

A_d : « la distance est d ».

$$|A_d| = 2 \times (n-d) \times (n-2)!$$

$$\mathbb{P}(A_d) = \frac{2(n-d)}{n(n-1)} \text{ maximale lorsque } d = 1 \text{ (amis côte à côte).}$$

Autre possibilité : seulement la position des amis, $\Omega = \mathcal{P}_2(\llbracket 1, n \rrbracket)$, proba uniforme. $|\Omega| = \binom{n}{2}$.

$|A_d| = n-d$ (choix du premier). D'où le résultat.

Sur un cercle : $\mathbb{P}(A_d) = \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$ ne dépend pas de d , sauf si n est pair et $d = \frac{n}{2}$ auquel cas $\mathbb{P}(A_{n/2}) = \frac{1}{n-1}$.

Solution de 16 :

- $p = \frac{\binom{N_1}{n_1} \dots \binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}.$
- $p = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \frac{N_1^{n_1} \dots N_k^{n_k}}{N^n}$ (répartition pour les couleurs = comme les anagrammes).
- $p = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \frac{A_{N_1}^{n_1} \dots A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n}$ et on retrouve la première proba.

Solution de 17 : Problème des anniversaires et des coïncidences

$$1. \Omega = \llbracket 1, M \rrbracket^n, A = \mathcal{A}_n(\llbracket 1, M \rrbracket), \mathbb{P}(A) = \frac{A_M^n}{M^n} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{M}\right)$$

$$2. M = 365, B = \bar{A}, \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}. \text{ Pour les applications numériques à la calculatrice, utiliser plutôt la produit ci-dessus.}$$

n	10	20	30	40	50	60	70
$\mathbb{P}(B)(\%)$	11	41	71	89	97	99,4	99,9

Pour $n = 22$, $\mathbb{P}(B) \approx 47,5\%$ et pour $n = 23$, $\mathbb{P}(B) \approx 50,7\%$.

Solution de 18 :

- Soit G_1 et G_2 de probabilités g_1 et g_2 les événements correspondant à la victoire du 1er et du 2e tireur respectivement.
Soit G'_1 et G'_2 les événements correspondant au fait que le 1er et du 2e tireur touche la cible au premier tir, respectivement.
Alors

$$G_1 = G'_1 \cup (G_1 \cap \overline{G'_1} \cap \overline{G'_2})$$

car le premier joueur gagne parce qu'il a touché la cible au premier tir, ou (exclusif) alors que les deux joueurs ont raté la cible. La clé est que dans ce dernier cas, on se retrouve dans une situation analogue à celle de départ.

$$g_1 = \mathbb{P}(G'_1) + \mathbb{P}(G_1 \cap \overline{G'_1} \cap \overline{G'_2}) = \mathbb{P}(G'_1) + \underbrace{\mathbb{P}(\overline{G'_1} \cap \overline{G'_2})}_{=\mathbb{P}(G_1)} \mathbb{P}(G_1 \mid \overline{G'_1} \cap \overline{G'_2}) = p_1 + (1-p_1)(1-p_2)g_1,$$

les tirs des deux joueurs étant indépendants. D'où $g_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$

Pour g_2 le raisonnement n'est pas tout à fait symétrique, car il faut que le premier joueur ait raté sa cible une première fois pour que le deuxième soit dans une situation analogue.

On a donc $g_2 = (1-p_1) \frac{p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$ qui donne $g_1 + g_2 = 1$: le jeu s'arrête presque sûrement.

2. $\mathbb{P}(A_n) = (1-p_1)^n(1-p_2)^n$, (A_n) suite décroissante avec $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$: « le jeu ne s'arrête pas » donc, en passant à la limite, par continuité décroissante, $\mathbb{P}(A) = 0$.
3. On trouve $p_1 = \frac{1}{3}$ et $p_2 = \frac{1}{2}$ en réinjectant $p_2 = \frac{3}{2}p_1$ dans $g_1 = g_2$.

Solution de 19 : Problème des rencontres

1. $\Omega = \mathfrak{S}_n$.
2. $\bar{E}_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_n) &= 1 - \mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |I|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |I|=k}} \frac{(n-k)!}{n!} = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Probabilités conditionnelles

Solution de 20 :

Chaîne de Markov

1. Proba totales : $p_n = p_{n-1} + (1-p)(1-p_{n-1}) = (2p-1)p_{n-1} + 1-p$.
2. $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$.
3. $\frac{1}{2}$.

Solution de 21 :

1. Bayes ($\mathbb{P}(E | T)$) : 49,2 %.
2. Bayes ($\mathbb{P}(E | \bar{T})$) : 0,1 %.
3. $F = (T \cap \bar{E}) \cup (\bar{E} \cap T)$: 2,1 %.

Solution de 22 :

On suppose construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui soit tel qu'à chaque étape les tirages soient uniformes.

E_i : « au i^{e} tirage, on obtient une boule de chaque couleur ».

On va utiliser la formule des probabilités composées.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1) &= \frac{n^2}{\binom{2n}{2}} \text{ et } \mathbb{P}\left(E_{i+1} \mid \bigcap_{j=1}^i E_j\right) = \frac{(n-i)^2}{\binom{2(n-i)}{2}}. \\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)^2}{\binom{2(n-i)}{2}} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)}{(2n-2i-1)} = \frac{n!}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1} = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}. \end{aligned}$$

Où alors, vu le résultat obtenu : on distingue toutes les boules tirées successivement et on s'intéresse seulement aux numéros des boules rouges. $\Omega = \mathcal{P}_n(\llbracket 1, 2n \rrbracket)$ avec probabilité uniforme. $|\Omega| = \binom{2n}{n}$ et si A est l'événement les couleurs sont alternées, pour chaque

couple de tirage successif $(i, i+1)$ on a deux emplacements possibles pour la boule rouge donc $|A| = \left| \prod_{i=1}^n \{i, i+1\} \right| = 2^n$.

Solution de 23 : Urne de Pólya

- Indications :
1. Bayes : $\frac{r+c}{r+c+b}$.
 2. Proba totales $(R_1, \bar{R}_1)$.
 3. Récurrence.
 - 4.

$$5. \mathbb{P}(R_m \cap B_n) = \frac{br}{(r+b)(r+b+c)}.$$

Corrigé : 1. Formule de Bayes : (R_1, B_1) est un système complet d'événements

$$\mathbb{P}(R_1|R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)}$$

(probabilités non nulles vu ce qui suit), chaque tirage se faisant uniformément.

- Au premier tirage, r boules rouges et b boules blanches. $\mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{r+b}$ et $\mathbb{P}(R_1) = \frac{r}{r+b}$.
- Sachant que R_1 est réalisé, l'urne au deuxième tirage contient $r+c$ boules rouges et b boules blanches donc $\mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{r+c}{r+b+c}$.
- Sachant que B_1 est réalisé, l'urne au deuxième tirage contient r boules rouges et $b+c$ boules blanches donc $\mathbb{P}(R_2|B_1) = \frac{r}{r+b+c}$.

$$\text{Finalement, } \mathbb{P}(R_1|R_2) = \frac{\frac{r+c}{r+b+c} \cdot \frac{r}{r+b}}{\frac{r+c}{r+b+c} \cdot \frac{r}{r+b} + \frac{b}{r+b+c} \cdot \frac{r}{r+b}} = \frac{r+c}{r+c+b}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(R_1|R_2) = \mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{r+c}{r+b+c}.$$

2. On peut appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (R_1, B_1) :

$$\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_n|B_1)\mathbb{P}(B_1).$$

Or $\mathbb{P}(R_n) = p_n(r, b)$ par définition, $\mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{r+b}$ et $\mathbb{P}(R_1) = \frac{r}{r+b}$.

De plus, l'expérience qui consiste à tirer une boule rouge au n^{e} tirage sachant qu'on avait tiré une boule rouge au premier tirage avec r boules rouges et b boules blanches est exactement la même que celle qui consiste à tirer une boule rouge au $n-1^{\text{e}}$ tirage à partir d'une urne contenant $r+c$ boules rouges et b boules blanches. Ainsi, $\mathbb{P}(R_n|R_1) = p_{n-1}(r+c, b)$. De la même manière, $\mathbb{P}(R_n|B_1) = p_{n-1}(r, b+c)$.

$$\text{Finalement, } p_n(r, b) = \frac{r}{r+b} p_{n-1}(r+c, b) + \frac{b}{r+b} p_{n-1}(r, b+c).$$

3. Par récurrence sur n , $\mathbb{P}(R_1) = p_1(r, b) = \frac{r}{r+b}$ et si pour un $n \geq 2$, pour tous r et b , $p_{n-1}(r, b) = \frac{r}{r+b}$, alors d'après la question précédente,

$$p_n(r, b) = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r}{r+b} + \frac{b}{r+b} \cdot \frac{r}{r+b} = \frac{r}{r+b}$$

ce qui établit la récurrence. Donc pour tout n , $\mathbb{P}(R_n) = \frac{r}{r+b}$.

Remarquable ! Même si le contenu de l'urne change, la probabilité d'obtenir une boule rouge à chaque tirage ne change pas !

4. De la même manière, si $n > m \geq 2$, on a $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \mathbb{P}(R_m \cap R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_m \cap R_n|B_1)\mathbb{P}(B_1)$, avec $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = p_{m,n}(r, b)$, $\mathbb{P}(R_m \cap R_n|R_1) = p_{m-1,n-1}(r+c, b)$ et $\mathbb{P}(R_m \cap R_n|B_1) = p_{m-1,n-1}(r, b+c)$. Donc

$$p_{m,n}(r, b) = \frac{r}{r+b} p_{m-1,n-1}(r+c, b) + \frac{b}{r+b} p_{m-1,n-1}(r, b+c).$$

On montre par récurrence sur $m \geq 1$ que pour tous r et b et tout $n > m$,

$$p_{m,n}(r, b) = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}.$$

Si $m=1$, si $n > 1$, $p_{1,n}(r, b) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_n) = \mathbb{P}(R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) = p_n(r+c, b) \frac{r}{r+b} = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}$.

Si c'est vrai pour $m-1$, et si $n > m$, alors $n-1 > m-1$ et

$$\begin{aligned} p_{m,n}(r, b) &= \frac{r}{r+b} p_{m-1,n-1}(r+c, b) + \frac{b}{r+b} p_{m-1,n-1}(r, b+c) \\ &= \frac{r}{r+b} \cdot \frac{(r+c)(r+2c)}{(r+b+c)(r+b+2c)} + \frac{b}{r+b} \cdot \frac{r(r+c)}{(r+b+c)(r+b+2c)} \\ &= \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)} \end{aligned}$$

ce qui établit la récurrence.

Remarquable ! A nouveau, c'est indépendant de n et m .

Via la formule des probabilités composées, on obtient par la même occasion que $\mathbb{P}(R_n|R_m)$ ne dépendant ni de n , ni de m .

5. Comme (R_n, B_n) est un système complet d'événements,

$$\mathbb{P}(R_m \cap B_n) = \mathbb{P}(R_m) - \mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \frac{r}{r+b} - \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)} = \frac{rb}{(r+b)(r+b+c)}.$$

Même remarque.

Solution de 24 :

1. Soit N la variable aléatoire du nombre de parties jouées. Alors $\mathbb{P}(N \geq n+1 \mid N \geq n) = \frac{1}{2}$.

Avec les probas composées, $\mathbb{P}(N \geq n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

Par continuité décroissante, $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (N \geq n)$ événement « on ne s'arrête pas », $\mathbb{P}(A) = 0$ en passant à la limite.

2. G_A, G_B, G_C les événements des gains de A, B, C.

L'événement « le jeu s'arrête au bout de n parties » : $(N = n) = (N \geq n) \setminus (N \geq n+1)$ est de probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$: comme le jeu s'arrête, on n'a plus le choix pour le dernier gagnant, il doit être égal à l'avant-dernier.

A_1 « A gagne la première partie ». On a alors un jeu en A, C, B, A, C, B, ..., A, C, B, A, A : $3k+2$ parties jouées.

$$\mathbb{P}(G_A \mid A_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(G_A \mid N = 3k+2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-1/8} = \frac{4}{7}.$$

Puis, avec un jeu en B, C, A, B, C, A, ..., B, C, A, A : $3k+1$ parties jouées.

$$\mathbb{P}(G_A \mid \overline{A_1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(G_A \mid N = 3k+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \frac{1}{8} \frac{1}{1-1/8} = \frac{1}{7}.$$

Donc $\mathbb{P}(G_A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{14}$.

Puis $\mathbb{P}(G_B) = \mathbb{P}(G_A)$ et $\mathbb{P}(G_C) = 1 - \mathbb{P}(G_A) - \mathbb{P}(G_B)$.

Solution de 25 : Fabriquer une pièce équilibrée

C'est simple (mais astucieux).

(*) On lance deux fois la pièce

(**) Si on tombe sur PF, on renvoie pile, si on tombe sur FP on renvoie face.

(***) Sinon (PP ou FF) on recommence en (*)

Ça donne bien une pièce équilibrée.

Indépendance

Solution de 26 : Oral CCINP – Loi du 0-1 de Borel-Cantelli

On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 1$.

1. La suite $(B_n)_n$ étant croissante pour l'inclusion, par propriété de continuité croissante,

$$\mathbb{P}(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(B).$$

2. Soit $\mathbb{P}(A_n) \neq 0$ et alors $\ln(1 - \mathbb{P}(A_n)) \neq 0$ et les deux séries divergent grossièrement, soit $\mathbb{P}(A_n) \rightarrow 0$ et $\ln(1 - \mathbb{P}(A_n)) \sim \mathbb{P}(A_n) \geq 0$ donc par comparaison de séries à termes positifs, les deux séries ont même nature.

C'est donc toujours le cas.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'indépendance des A_n ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) &= \ln\left(\prod_{k=0}^n \mathbb{P}(\overline{A_k})\right) = \ln\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n \overline{A_k}\right)\right) \\ &= \ln(1 - \mathbb{P}(B_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} \ln(1 - \mathbb{P}(B)) & \text{si } \mathbb{P}(B) < 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Avec la question précédente, on a bien $\mathbb{P}(B) < 1$ si et seulement si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.

4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Alors $(C_n)_n$ est décroissante, donc par continuité décroissante, $\mathbb{P}(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(I)$.

Posons, pour $n, m \in \mathbb{N}$, $C_n^m = \bigcup_{k=n}^m A_k$. Par continuité croissante, $\mathbb{P}(C_n^m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n)$.

Puis, comme dans la question précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) &= \ln\left(\prod_{k=n}^m \mathbb{P}(\overline{A_k})\right) = \ln\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A_k}\right)\right) \\ &= \ln(1 - \mathbb{P}(C_n^m)) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \begin{cases} \ln(1 - \mathbb{P}(C_n)) & \text{si } \mathbb{P}(C_n) < 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

■ Si $\mathbb{P}(B) < 1$, alors par croissance, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(C_n) < 1$ donc $\sum_{k \geq n} \ln(1 - \mathbb{P}(A_k))$ converge et

$$1 - \mathbb{P}(C_n) = e^{\sum_{k=n}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_k))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$$

comme reste d'une série convergente. On a donc $\mathbb{P}(I) = 0$ par unicité de la limite.

■ Si $\mathbb{P}(B) = 1$, avec les deux questions précédentes, $\sum \ln(1 - \mathbb{P}(A_n))$ diverge, et c'est aussi le cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $\sum_{k \geq n} \ln(1 - \mathbb{P}(A_k))$.

Comme c'est une série à terme négatifs, $\ln(1 - \mathbb{P}(C_n^m)) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} -\infty$, donc $\mathbb{P}(C_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\mathbb{P}(I) = 1$.

On a donc bien

$$\mathbb{P}(I) = 0 \text{ si et seulement si } \mathbb{P}(B) < 1, \text{ et } \mathbb{P}(I) = 1 \text{ lorsque ce n'est pas le cas.}$$

I est réalisé se traduit par la réalisation d'une infinité de A_n .

Solution de 27 : Loi Zeta ; grand classique de l'écrit

1. On peut définir une probabilité à condition que la famille $\left(\frac{\lambda}{n^s}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit sommable de somme 1. C'est le cas lorsque $s > 1$ et $\lambda = \frac{1}{\zeta(s)}$.

2. Il fallait plutôt lire « n est un multiple de m ».

$$\mathbb{P}(A_m) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(mk)^s} = \frac{1}{m^s}.$$

3. Si $p_1, \dots, p_n$ sont premiers, $A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_n} = A_{p_1 \cdots p_n}$.
Avec la question précédente,

$$\mathbb{P}(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_n}) = \mathbb{P}(A_{p_1 \cdots p_n}) = \frac{1}{(p_1 \cdots p_n)^s} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{p_k^s} = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_{p_k}).$$

donc les A_p pour $p \in \mathcal{P}$ sont indépendants.

4. On souhaite montrer que $\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$.

Or $\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(\overline{A_p})$ qui est un produit infini.

Mais les $\overline{A_p}$ sont indépendants, donc si on considère les n premiers nombres premiers $p_1, \dots, p_n$,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\overline{A_{p_k}}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_{p_k}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_{p_k}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}\right)$$

par continuité décroissante.

Or $n \in \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p} \iff n$ n'a aucun diviseur premier $\iff n = 1$.

Donc $\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \mathbb{P}(\{1\}) = \lambda = \frac{1}{\zeta(s)}$ et, finalement, $\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$.

5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln u_n = -\sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ avec $\frac{1}{p_n} \rightarrow 0$ donc $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \sim \frac{1}{p_n}$ donc $(\ln u_n)_n$ converge par comparaison de séries à termes positifs. Donc, par continuité de l'exponentielle, $u_n \rightarrow \ell$.

Puis, pour tout $s > 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < 1 - \frac{1}{p_n} \leq 1 - \frac{1}{p_n^s}$, donc $u_n \geq \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$ et lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\ell \geq \zeta(s)$.

Or il est classique que $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} +\infty$. En effet, une comparaison série-intégrale permet d'obtenir¹ que $\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{s-1}$.

Autre rédaction possible : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} \leq \zeta(s) \leq \ell$ donc lorsque $s \rightarrow 1$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ell$, ce qui est contradictoire.

Finalement, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

1. Le sujet CCINP 2021 le faisait remonter quelques questions avant

Solution de 28 : Temps d'attente

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'événement $P_n =$ «On obtient pile lors du n^{e} lancer». Les événements P_n sont indépendants et chacun de probabilité p .

1. Immédiatement, $A_1 = \emptyset$ et donc $a_1 = 0$.

Aussi, $A_2 = P_1 \cap P_2$. Par indépendance des lancers, $a_2 = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) = p^2$. Enfin, $A_3 = \overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3$ ce qui donne $a_3 = (1-p)p^2$.

2. Considérons les résultats des deux premiers lancers :

$$P_1 P_2, P_1 \overline{P_2}, \overline{P_1} P_2 \text{ et } \overline{P_1} \overline{P_2}$$

On forme un système complet d'événements en regroupant

$$P_1 P_2, P_1 \overline{P_2} \text{ et } F_1 = \overline{P_1} P_2 \cup \overline{P_1} \overline{P_2}.$$

Par translation du problème,

$$\mathbb{P}(A_{n+2} | F_1) = \mathbb{P}(A_{n+1}) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_{n+2} | P_1 \overline{P_2}) = \mathbb{P}(A_n)$$

tandis que

$$\mathbb{P}(A_{n+2} | P_1 P_2) = 0.$$

Par la formule des probabilités totales,

$$a_{n+2} = 0 \times p^2 + a_n \times p(1-p) + a_{n+1}(1-p)$$

soit encore

$$a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + p(1-p)a_n.$$

3. Les événements A_n étant deux à deux incompatibles,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right)$$

Notons S cette valeur (élément de $[0, 1]$). En sommant pour $n \in \mathbb{N}^*$ la relation de la question précédente, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+2} = (1-p) \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+2} + (1-p) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

ce qui donne par translation d'indice

$$\sum_{n=3}^{+\infty} a_n = (1-p) \sum_{n=2}^{+\infty} a_n + (1-p) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

On en déduit

$$S - (a_1 + a_2) = (1-p)(S - a_1) + p(1-p)S.$$

On en tire $S = 1$: il est quasi-certain que deux piles consécutifs apparaissent.

Solution de 29 : Marche aléatoire (écrit E3A)

1. (a) D'après l'indication de l'énoncé, le nombre cherché est directement 2^ℓ .

(b) Il suffit de placer, par exemple, les deux N parmi les cinq étapes : il y a $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ trajets possibles.

(c) De même, le nombre de chemins reliant l'origine à $M(a, b)$ est $\binom{a+b}{b} = \binom{a+b}{a}$.

2. (a) Pour que le chemin traverse Δ pour la première fois à l'étape 2, les seuls chemins possibles sont « N, E » et « E, N », qui amènent en $(1, 1)$ (remarquons que si on est en (a, b) , on y est au bout de $a+b$ étapes car on ne fait que monter ou aller à droite). Le sujet semble sous-entendre que le choix du piéton à chaque croisement est uniforme.

$$\text{On calcule alors } \mathbb{P}(U_1) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

- (b) Par aller du point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$, il faut aller $n-1$ fois au Nord et $n-1$ fois à l'Est.

Le nombre de chemin correspond au nombre de façon de placer les $n-1$ Nord parmi les $2n-2$ déplacements soit $\left| C_{(0,1)}^{(n-1,n)} \right| = \binom{2n-2}{n-1}$.

- (c) On remarque que chaque chemin reliant $(1, 0)$ à $(n-1, n)$ coupe nécessairement la droite $\Delta : y = x$. Soit (a, a) le point d'abscisse minimale sur ce chemin.

Alors en prenant le symétrique de la partie du chemin entre $(1, 0)$ et (a, a) par rapport à Δ et en gardant la partie du chemin entre (a, a) et $(n-1, n)$ (à voir sur un dessin !), on obtient un chemin entre $(0, 1)$ et $(n-1, n)$ coupant Δ , pour la première fois, en (a, a) .

On obtient ainsi une bijection entre les chemins reliant $(1, 0)$ à $(n-1, n)$ et les chemins reliant $(0, 1)$ à $(n-1, n)$ coupant Δ , dont les nombres sont égaux.

Ainsi, le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant Δ est

$$\left| C_{(1,0)}^{(n-1,n)} \right| = \binom{2n-2}{n-2} \text{ sur le même principe que la question précédente.}$$

- (d) Vu la question précédente, on a immédiatement que

$$\left| T_{(0,1)}^{(n-1,n)} \right| = \left| C_{(0,1)}^{(n-1,n)} \right| - \left| C_{(1,0)}^{(n-1,n)} \right| = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}.$$

- (e) Par symétrie (par rapport à Δ), on a directement aussi $\left| T_{(1,0)}^{(n,n-1)} \right| = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}.$

- (f) Si le chemin passe pour la première fois par Δ à l'étape $2n$, c'est forcément au point de coordonnées (n, n) car le nombre d'étapes est toujours donné par la somme des coordonnées du point.

Il y a alors deux cas disjoints possible :

- Soit on a commencé par E et il faut relier le point $(1, 0)$ au point $(n, n-1)$ sans croiser Δ et nécessairement terminer par un N (événement A).
- Soit on a commencé par N et il faut relier le point $(0, 1)$ au point $(n-1, n)$ sans croiser Δ et nécessairement terminer par un E (événement B).

La formule des probabilités totales s'applique au système complet d'événements (N_1, E_1) et donne (avec P probabilité uniforme sur les chemins) :

$$\begin{aligned} P(U_n) &= P(U_n|N_1)P(N_1) + P(U_n|E_1)P(E_1) \\ &= \frac{1}{2} (P(A) + P(B)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\left| T_{(1,0)}^{(n,n-1)} \right|}{2^{2n-1}} + \frac{\left| T_{(0,1)}^{(n-1,n)} \right|}{2^{2n-1}} \right) \quad \text{Après l'étape 1, il reste } 2n-1 \text{ étapes.} \\ &= \frac{1}{2^{2n-1}} \left(\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2} \right) \\ &= \frac{1}{2^{2n-1}} \left(\frac{(2n-2)!}{(n-1)!2} - \frac{(2n-2)!}{(n-2)!n!} \right) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}n!(n-1)!} (n-(n-1)) \end{aligned}$$

Finalement, $P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$ Puis

$$P(U_n) = \frac{2 \cdot n \cdot (2n-2)!}{(2^n \cdot n!)^2} = \frac{(2n)!}{(2n-1)(2 \times 4 \times \dots \times 2n)^2} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{(2n-1)(2 \times 4 \times \dots \times 2n)}$$

Donc $P(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n}.$

3. (a) On calcule $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n-1}{2n+2}$ donc $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right) = \ln\left(\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{2n}}\right) = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et enfin $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = -\frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$

- (b) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante, continue et positive sur $[1, +\infty[$, un résultat du programme corollaire à la comparaison série-intégrale nous dit que $w_n = \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} - \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série convergente (avec $n \geq 2$). Appelons ℓ sa somme.

On a alors $\sum_{n=2}^N w_n = \int_1^N \frac{dt}{t} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} = \ln N - \ln 1 - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

Ainsi, en notant $\gamma = 1 - \ell$, on obtient $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o_{N \rightarrow +\infty}(1).$

(c) D'une part, en tant que somme télescopique, on a déjà

$$\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln(v_N) - \ln(v_1) = \ln v_N - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln v_N + \ln 2$$

d'après la question 3.a.

D'autre part, avec la question 4.a, en notant $t_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) + \frac{3}{2n}$, on a $|t_n| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc, par comparaison de séries à termes généraux positifs, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, $\sum t_n$ est absolument convergente donc convergente vers un réel S et $\sum_{n=1}^{N-1} t_n = S + o(1)$.

$$\text{Alors } \sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = -\frac{3}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + S + o(1) = -\frac{3}{2} \ln(N-1) - \frac{3}{2} \gamma + S + o(1) \text{ d'où finalement } \ln v_N = -\frac{3}{2} \ln(N-1) + a_n \text{ où } a_n \rightarrow -\frac{3}{2} \gamma + S - \ln 2.$$

$$\text{Finalement, } v_N = e^{-\frac{3}{2} \ln(N-1) + a_n} = \frac{e^{a_n}}{N^{\frac{3}{2}}} \text{ et } v_N \sim \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}} \text{ où } k = e^{-\frac{3}{2} \gamma + S - \ln 2} > 0, \text{ par continuité de l'exponentielle.}$$

(d) Soit $n \geq 2$. Comme $v_{n+1} = \frac{2n-1}{2n+2} v_n$, $(2n+2)v_{n+1} = (2n-1)v_n$ et on a bien

$$v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}.$$

Alors, la série $\sum v_n$ étant effectivement convergente par comparaison à une série de Riemann vu la question précédente, mais aussi par télescopage vu ce qui précède, la question précédente permettant de voir que $(2n-1)v_n \sim \frac{2k}{\sqrt{n}}$ donc $(2n-1)v_n \rightarrow 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = v_1 + v_2 + \sum_{n=2}^{+\infty} v_{n+1} = v_1 + v_2 + \sum_{n=2}^{+\infty} ((2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}) = v_1 + v_2 + 3v_2 = v_1 + 4v_2$$

$$\text{Et comme } v_1 = \mathbb{P}(U_1) = \frac{1}{2} \text{ (question 3.a) et } v_2 = \mathbb{P}(U_2) = \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{8} \text{ (question 3.f), on obtient } \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U_n) = 1.$$

$$\text{Comme les } U_n \text{ sont deux à deux disjoints, } \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U_n) = 1.$$

On en déduit qu' il est presque sûr que notre piéton passe par la droite Δ .

Variables aléatoires

Solution de 30 :

1. (a) $\mathbb{E}(\det(M)) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(XT - YZ)\right) = \frac{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(T) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)}{2} = 0$ par linéarité et indépendance.
- (b) On vérifie que $\det(M)(\Omega) = \{0, -1, 1\}$ et la définition de l'espérance (nulle) donne alors le résultat.
Ou alors on vérifie que $\mathbb{P}(\det M = 1) = \mathbb{P}(XT = 1, ZY = -1)$ et $\mathbb{P}(\det M = -1) = \mathbb{P}(XT = -1, ZY = 1)$ et les probabilités sont égales pour des raisons de symétrie.
Ou alors on voit que $-\det(M)$ est la variable aléatoire obtenue en changeant X en $-X$ et Z en $-Z$ ce qui ne change pas la loi car $-X, Y, -Z, T$ sont indépendantes et de même loi uniforme que X, Y, Z, T .
- (c) Vu la première question, $\mathbb{V}(\det(M)) = \mathbb{E}(\det(M)^2) = \frac{1}{2}(1 - \mathbb{E}(XYZT)) = \frac{1}{2}(1 - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(T)) = \frac{1}{2}$ par indépendance.

2. (a)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M \in \mathcal{O}(2)) &= \mathbb{P}(X^2 + Z^2 = Y^2 + T^2 = 1, XY + ZT = 0) = \mathbb{P}(XY + ZT = 0) \\ &= \mathbb{P}(XY = 1, ZT = -1) + \mathbb{P}(XY = -1, ZT = 1) \\ &= 2\mathbb{P}(XY = 1, ZT = -1) && \text{par symétrie} \\ &= 2\mathbb{P}(XY = 1)\mathbb{P}(ZT = -1) && \text{par lemme des coalitions} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(ZT = -1) = \frac{1}{2} \text{ par symétrie.}$$

$$\text{Finalement, } \mathbb{P}(M \in \mathcal{O}(2)) = \frac{1}{2}.$$

- (b) $\mathbb{P}(M \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(\det M = 1) + \mathbb{P}(\det M = -1) = 2\mathbb{P}(\det M = 1) = 2\mathbb{P}(XT = -1, ZY = 1) = \frac{1}{2}$ par symétrie vu le calcul précédent.

(C) $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(M)\lambda + \det M$.

1^{er} cas $XT = 1$ et $YZ = 1$: $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda$ scindé simple donc M est diagonalisable.

2^e cas $XT = 1$ et $YZ = -1$: $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda + 1$ à discriminant < 0 : M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

3^e cas $XT = -1$ et $YZ = 1$: $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - 1$ scindé simple donc M est diagonalisable.

4^e cas $XT = -1$ et $YZ = -1$: $\chi_M(\lambda) = \lambda^2$ donc M n'est pas diagonalisable car non nulle.

Finalement, la probabilité que M soit diagonalisable est $\frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$ et $\frac{3}{4}$ dans $\mathbb{C}$.

Autre raisonnement possible :

- Si $Y = Z$, la matrice symétrique réelle est diagonalisable cela arrive à probabilité $P(YZ = 1) = 1/2$.
- Sinon, ($YZ = -1$) et le polynôme caractéristique de $\sqrt{2}M$ est $\lambda^2 - (X+T)\lambda + (XT+1)$ et on sépare le cas $XT = 1$ (diagonalisable seulement dans $\mathbb{C}$) ou $XT = -1$ (non diagonalisable) ...

D'où la probabilité d'être diagonalisable dans $\mathbb{R}$: $\frac{1}{2}$, et la probabilité de l'être dans $\mathbb{C}$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

1. La famille $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de réels positifs de somme 1 puisque

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} = 1$$

La famille $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une distribution de probabilités : elle détermine une loi de probabilité. On note $(y_n)_{n \geq 1}$ le taux de panne de Y . Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n}$$

et donc

$$y_n = \mathbb{P}(Y = n \mid Y \geq n) = \frac{\mathbb{P}(Y = n \cap Y \geq n)}{\mathbb{P}(Y \geq n)} = \frac{\mathbb{P}(Y = n)}{\mathbb{P}(Y \geq n)} = \frac{1}{n+1}.$$

2. Par récurrence, on établit la formule pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (et non seulement $n \geq 2$).

Pour $n = 1$, la formule est valable puisque qu'un produit vide vaut 1. Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$. Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq n+1) &= \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X = n) \\ &= \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X = n \mid X \geq n) \mathbb{P}(X \geq n) \\ &= \mathbb{P}(X \geq n)(1 - x_n) = \prod_{k=1}^n (1 - x_k). \end{aligned}$$

La récurrence est établie.

3. Pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = n \mid X \geq n) \mathbb{P}(X \geq n) = x_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k).$$

4. Une variable aléatoire à taux de panne constant p vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$$

Puisque p est une probabilité conditionnelle, on a $p \in [0, 1]$. Nécessairement $p \neq 0$ et $p \neq 1$ pour que X vérifie la condition énoncée initialement. La variable X suit donc une loi géométrique de paramètre p .

Inversement, supposons que X suive une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On a $\mathbb{P}(X \geq n) = (1-p)^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ puis

$$x_n = \frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X \geq n)} = p$$

Le taux de panne de X est constant.

Les variables aléatoires discrètes à taux de panne constant sont donc les variables aléatoires suivant une loi géométrique, dont le paramètre correspond au taux de panne.

1. S_2 est à valeurs dans $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$, et pour tout $k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, X_1 et X_2 étant indépendantes,

$$\mathbb{P}(S_2 = k) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_1 = j) \mathbb{P}(X_2 = k - j) = \sum_{j=1}^{k-1} p q^{j-1} p q^{k-j-1} = (k-1) p^2 q^{k-2}$$

2. Pour $x \neq 0$,

$$P(x) = \sum_{1 \leq n \leq j \leq k-1} \binom{j-1}{n-1} x^n = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{n=1}^j \binom{j-1}{n-1} x^n = \sum_{j=1}^{k-1} x(x+1)^{j-1} = x \frac{1-(x+1)^{k-1}}{1-(x+1)} = (x+1)^{k-1} - 1 = \sum_{n=1}^{k-1} \binom{k-1}{n} x^n$$

Puis deux polynômes coïncidant sur une infinité de valeurs sont égaux, par unicité des coefficients, on obtient la formule demandée.

Remarque : c'est une technique de type série génératrice, mais avec des sommes finies !

3. On a $\mathbb{P}(S_1 = k) = \mathbb{P}(X_1 = k) = p q^{k-1}$ et $\mathbb{P}(S_2 = k) = (k-1) p^2 q^{k-2} \dots$ On voit un pattern, mais quid du coefficient ?
On peut se rassurer avec, pour $k \geq 3$, avec $S_2 \perp X_3$ (lemme des coalitions)

$$\mathbb{P}(S_3 = k) = \mathbb{P}(S_2 + X_3 = k) = \sum_{j=2}^{k-1} \mathbb{P}(S_2 = j) \mathbb{P}(X_3 = k - j) = \sum_{j=2}^{k-1} (j-1) p^2 q^{j-2} p q^{k-j-1} = \frac{(k-1)(k-2)}{2} p^3 q^{k-3}$$

Cette fois c'est plus clair et on conjecture, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $\forall k \in \llbracket n, +\infty \rrbracket$, $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$ » et le calcul précédent nous donne la marche à suivre pour l'hérédité.

La récurrence est déjà initialisée trois fois et si on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vrai, alors, $\forall k \in \llbracket n+1, +\infty \rrbracket$, avec $S_n \perp X_{n+1}$ (lemme des coalitions)

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \mathbb{P}(S_n + X_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}(S_n = j) \mathbb{P}(X_{n+1} = k - j) = \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} p^n q^{j-n} p q^{k-j-1} = \binom{k-1}{n} p^n q^{k-n}$$

avec la question précédente.

4. T_n est à valeurs dans $\llbracket n, +\infty \rrbracket$ et si $k \in \llbracket n, +\infty \rrbracket$, avoir $T_n = k$, c'est avoir tiré pile au k° tirage, et parmi les $k-1$ premiers tirages avoir tiré exactement $n-1$ fois pile et $k-n$ fois face.

En notant $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de v.a. de loi $\mathcal{B}(p)$ des résultats à chaque tirage,

$$\mathbb{P}(T_n = k) = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_{k-1} \in \{0,1\} \\ \text{dont } n-1 \text{ valent } 1}} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_{k-1} = x_{k-1}) \mathbb{P}(X_n = 1) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

Et vu le calcul des questions précédentes, on peut déterminer l'espérance (qui ne dépend que de la loi) en utilisant S_n :

$$\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(S_n) = n \mathbb{E}(X_1) = \frac{n}{p}.$$

Solution de 33 :

(a) En éliminant de l'univers des possibles l'événement négligeable où la pièce tombe toujours du même côté, la variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De même, en éliminant aussi l'événement négligeable où la deuxième succession est de longueur infinie, la variable Y est aussi définie à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On poursuit l'étude en supposant être dans l'univers probabiliste correspondant ¹. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les événements :

$$P_n = \text{«La pièce tombe du côté pile lors du } n\text{-ième lancer} \text{ »} \quad \text{et} \quad F_n = \overline{P_n}.$$

La variable X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X = k)$ est la réunion des événements incompatibles $P_1 \dots P_k F_{k+1}$ et $F_1 \dots F_k P_{k+1}$. On a donc

$$P(X = k) = p^k(1-p) + (1-p)^k p.$$

Sachant l'espérance d'une loi géométrique,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p^k(1-p) + (1-p)^k p = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.$$

(b) La variable (X, Y) prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Pour $k, \ell \in \mathbb{N}^*$, calculons $P(X = k, Y = \ell)$. L'événement $(X = k, Y = \ell)$ est réalisé dans la situation où les k premiers lancers tombent du côté pile, les ℓ suivants du côté face et le $k + \ell + 1$ -ième du côté pile et aussi dans la situation inverse où l'on échange pile et face. Par incompatibilité de ces deux situations,

$$\begin{aligned} P(X = k, Y = \ell) &= P(\underbrace{P_1 \dots P_k}_{k \text{ fois}} \underbrace{F_{k+1} \dots F_{k+\ell}}_{\ell \text{ fois}} \underbrace{P_{k+\ell+1}}_{P_{k+\ell+1}}) \\ &\quad + P(\underbrace{F_1 \dots F_k}_{k \text{ fois}} \underbrace{P_{k+1} \dots P_{k+\ell}}_{\ell \text{ fois}} \underbrace{F_{k+\ell+1}}_{F_{k+\ell+1}}) \end{aligned}$$

et par l'indépendance des lancers,

$$\begin{aligned} P(X = k, Y = \ell) &= p^k(1-p)^\ell p + (1-p)^k p^\ell (1-p) \\ &= p^{k+1}(1-p)^\ell + (1-p)^{k+1} p^\ell \end{aligned}$$

(c) Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y = \ell) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k, Y = \ell) = p^2(1-p)^{\ell-1} + (1-p)^2 p^{\ell-1}$$

puis

$$E(Y) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} = 2.$$

Par l'inégalité $a^2 + b^2 \geq 2ab$ valable pour tous a et b réels, on observe

$$E(X) \geq \frac{2p(1-p)}{p(1-p)} = 2 = E(Y)$$

(d) Les variables X et Y sont indépendantes si, et seulement si,

$$P(X = k, Y = \ell) = P(X = k)P(Y = \ell) \quad \text{pour tout } (k, \ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$$

c'est-à-dire

$$p^{k+1}(1-p)^\ell + (1-p)^{k+1} p^\ell = (p^k(1-p) + (1-p)^k p)(p^2(1-p)^{\ell-1} + (1-p)^2 p^{\ell-1}).$$

Pour $k = \ell = 1$, on obtient la condition

$$p^2(1-p) + (1-p)^2 p = 2(p^3(1-p) + p(1-p)^3)$$

qui se simplifie en

$$p(1-p)(2p-1)^2 = 0.$$

Il est donc nécessaire que $p = 1/2$. Inversement, pour $p = 1/2$, la relation (1) est vérifiée.

Solution de 34 : Le problème du collectionneur

1. Les achats de pochettes sont supposés indépendants, et un achat est un succès avec la probabilité $\frac{n-k+1}{n}$.

Donc L_k suit une loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$.

2. Et donc l'espérance est

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n-k+1}$$

Or

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n-k+1} = \sum_{j=1}^n \frac{n}{j}$$

Un équivalent est donc $n \ln n$.

3. Les L_k sont considérés deux à deux indépendants. On a

$$\mathbb{V}(T_n) = \mathbb{V}(L_1 + \dots + L_n) = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{n-k+1}{n}\right) \frac{n^2}{(n-k+1)^2} = n^2 \sigma_n - n H_n$$

où (σ_n) converge vers $\pi^2/6$. Un équivalent est donc $\frac{\pi^2}{6} n^2$.

Solution de 35 :

(a) On remarque que la fonction $t \mapsto P(X > t)$ est en escalier et, par conséquent, continue par morceaux. Au surplus, celle-ci est identiquement nulle pour t assez grand ¹ et il est possible d'introduire l'intégrale étudiée. Notons $x_1 < \dots < x_n$ les valeurs prises par X . Par la relation de Chasles,

$$\int_0^{+\infty} P(X > t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} P(X > t) dt$$

en posant $x_0 = 0$. Pour t dans l'intervalle $[x_{k-1}; x_k[$, la probabilité $P(X > t)$ est constante égale à la somme des $P(x_\ell)$ pour $\ell \in \llbracket k; n \rrbracket$. On a donc

$$\int_0^{+\infty} P(X > t) dt = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \sum_{\ell=k}^n P(x_\ell).$$

Ceci conduit à considérer une somme triangulaire où l'on échange les deux signes sommes,

$$\int_0^{+\infty} P(X > t) dt = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^{\ell} (x_k - x_{k-1}) P(x_\ell) = \sum_{\ell=1}^n (x_\ell - x_0) P(x_\ell) = E(X).$$

(b) Si X est une variable aléatoire à valeurs négatives, on obtient en considérant $-X$ puis en réalisant le changement de variable $u = -t$

$$E(X) = - \int_0^{+\infty} P(-X > t) dt = - \int_0^{+\infty} P(X < -t) dt = - \int_{-\infty}^0 P(X < u) du$$

Si X est une variable aléatoire à valeurs de signes quelconques, on l'écrit $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 = X \mathbf{1}_{\{X \geq 0\}}$ et $X_2 = X \mathbf{1}_{\{X < 0\}}$. On a alors

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) = \int_0^{+\infty} P(X_1 > t) dt - \int_{-\infty}^0 P(X_2 < t) dt$$

Cependant, pour tout $t \geq 0$, $(X_1 > t) = (X > t)$ tandis que $(X_2 < t) = (X < t)$ pour tout $t < 0$. On en déduit

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t) dt - \int_{-\infty}^0 P(X < t) dt$$

Solution de 36 : L'espérance via une loi conditionnelle et formule de l'espérance totale

1. Notons $E = \{x \in X(\Omega), P(X = x) \neq 0\}$. Rappelons que la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ est définie par, pour $y \in Y(\Omega)$:

$$P_{Y|X=x}(\{y\}) = P(Y = y | X = x).$$

On a Y d'espérance finie donc $(yP(Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$ sommable et $E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y)$.

Sous réserve d'existence (sommabilité), $E(Y | X = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y | X = x)$.

On s'intéresse alors à la sommabilité de la famille $(yP(Y = y | X = x)P(X = x))_{(x,y) \in E \times Y(\Omega)}$.

Or, dans $[0, +\infty]$, par Fubini positif et la formule des probabilités totales appliqué au système quasi-complet d'événements $(X = x)_{x \in E}$,

$$\sum_{(x,y) \in E \times Y(\Omega)} |y| P(Y = y | X = x) P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(|y| \sum_{x \in E} P(Y = y | X = x) P(X = x) \right) = \sum_{y \in Y(\Omega)} |y| P(Y = y) < +\infty$$

car Y est d'espérance finie, donc on peut refaire le même calcul, sans valeur absolue, avec le théorème de Fubini général et la formule des probabilités totales toujours

$$\sum_{(x,y) \in E \times Y(\Omega)} y P(Y = y | X = x) P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \sum_{x \in E} P(Y = y | X = x) P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y P(Y = y) = E(Y).$$

Le théorème de Fubini (dans l'autre sens) nous dit aussi que pour tout $x \in E$, $(yP(Y = y | X = x))_{y \in Y(\Omega)}$ est sommable donc $E(Y | X = x)$ est bien définie et que

$$E(Y) = \sum_{(x,y) \in E \times Y(\Omega)} y P(Y = y | X = x) P(X = x) = \sum_{x \in E} \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} y P(Y = y | X = x) \right) P(X = x) = \sum_{x \in E} E(Y | X = x) P(X = x).$$

2. C'est le même principe en remplaçant le système quasi-complet d'événements $(X = x)_{x \in E}$ par $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

3. On trouve $P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \sum_{j=1}^n j^k (n-j)^{r-k}}{n^{r+1}}$ et $E(X) = \frac{r(n+1)}{2n}$.

Solution de 37 : Embranchement routier

Y suit une loi de Poisson de paramètre λp .

$$\mathbb{P}(X_n | Y = k) = e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Solution de 38 : Théorème de Weierstrass ; polynômes de Bernstein et probabilités (Écrits CCINP)

1. (a) C'est Bienaymé-Tchebychev, comme dans la démonstration de la loi faible des grands nombres.
 (b) C'est $B_n(f)(x)$ par la formule de transfert.
 2. (a) C'est une conséquence de l'uniforme continuité de f continue sur le segment $[0, 1]$ (théorème de Heine).
 (b) Inégalité triangulaire et $\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$
 (c) On rassemble sous le signe $\sum$ dans $|B_n(f)(x) - f(x)|$, puis on utilise l'inégalité triangulaire, puis on sépare suivant si $\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha$ ou non. Dans le premier cas, on utilise la question précédente et la question 1.a pour majorer par ε à partir d'un certain rang, dans le second cas, on utilise l'uniforme continuité de 2.a pour majorer par ε .
 La suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f sur le segment $[0, 1]$.
-

1. Soit p une projection vectorielle d'un espace vectoriel E de dimension n et $\text{rg } p = r \in \mathbb{N}$.

On peut avoir $p = 0$ ou id_E .

- (a) On a $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$, $\dim(\text{Im } p) = r$ et pour tout x dans $\text{Im } p$ on a $p(x) = x$, dans une base adaptée à la somme directe la matrice W de p s'écrit :

$$W = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

avec I_r la matrice identité d'ordre r .

- (b) $\text{Sp}(W) \subset \{0, 1\}$.

- (c) On a $\text{tr}(W) = \text{rg}(W)$.

- (d) $\det(W) = 1$ si $p = \text{id}_E$ et $\det(W) = 0$ sinon.

2. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, donc $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$.

- (a) Pour tout ω dans Ω , $M(\omega)$ est semblable à $\Delta(\omega) = \text{diag}(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$, donc $T(\omega) = \text{tr}(\Delta(\omega)) = X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)$, par suite $T(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

- (b) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Posons $\mathcal{P}_k$ l'ensemble de toutes les parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal k , on a $\text{Card } \mathcal{P}_k = \binom{n}{k}$.

L'événement $[T = k]$ contient les $\omega \in \Omega$ pour lesquels il existe une partie $I \in \mathcal{P}_k$ telle que $X_i(\omega) = 1$ si $i \in I$ et $X_i(\omega) = 0$ sinon. On alors

$$[T = k] = \bigcup_{I \in \mathcal{P}_k} \left(\left(\bigcap_{i \in I} [X_i = 1] \right) \cap \left(\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} [X_i = 0] \right) \right)$$

Cette réunion est disjointe et les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = k) &= \sum_{I \in \mathcal{P}_k} \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = 1) \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} \mathbb{P}(X_i = 0) \\ &= \sum_{I \in \mathcal{P}_k} p^k q^{n-k} \quad (q = 1 - p) \\ &= |\mathcal{P}_k| \\ &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \end{aligned}$$

T suit la loi et l'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Par suite $\mathbb{E}(T) = np$.

3. On a pour tout ω dans Ω , $M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega) = \text{diag}(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$, donc $M(\omega)$ est la matrice d'une projection ($M(\omega)^2 = M(\omega)$), par suite $\text{tr}(M(\omega)) = \text{rg}(M(\omega))$ et $R = T$.
D'où $R \sim \mathcal{B}(n, p)$.

4. On note D la variable aléatoire $\det(M)$.

- (a) Pour tout ω dans Ω , $M(\omega)$ est la matrice d'une projection donc $\det(M(\omega)) = 1$ ou 0 et $D(\Omega) = \{0, 1\}$.

- (b) L'événement $[D = 1]$ contient les ω tels $M(\omega) = \Delta(\omega) = I_n$ donc

$$[D = 1] = \bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} [X_i = 1]$$

l'indépendance des X_i donne :

$$\mathbb{P}(D = 1) = \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mathbb{P}(X_i = 1) = p^n$$

Par suite

$$\mathbb{P}(D = 0) = 1 - \mathbb{P}(D = 1) = 1 - p^n$$

D'où $D \sim \mathcal{B}(p^n)$ et $\mathbb{E}(D) = p^n$.

5. Soit Z l'évènement :

« les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension »

Pour tout ω dans Ω , $M(\omega)$ est la matrice d'une projection, ses sous espaces propres possibles sont $E_0(M(\omega)) = \text{Ker } M(\omega)$ et $E_1(M(\omega)) = \text{Im } M(\omega)$.

- (a) L'évènement V : « M ne possède qu'une seule valeur propre » est équivalent à $M = 0$ ou I_n on écrit donc $V = [M = 0] \cup [M = I_n]$, ces deux événements sont disjoints donc

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(M = 0) + \mathbb{P}(M = I_n)$$

Et on a

$$[M = 0] = \bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} [X_i = 0] \text{ et } [M = I_n] = \bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} [X_i = 1]$$

l'indépendance des X_i donne :

$$\mathbb{P}(M = 0) = \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mathbb{P}(X_i = 0) = q^n \text{ et } \mathbb{P}(M = I_n) = \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mathbb{P}(X_i = 1) = p^n$$

D'où $\mathbb{P}(V) = p^n + q^n$.

- (b) On suppose n impair .
 Pour tout ω dans Ω , on a $\mathbb{R}^n = \text{Ker } M(\omega) \oplus \text{Im } M(\omega)$, si $\omega \in Z$ alors $\dim \text{Ker } M(\omega) = \dim \text{Im } M(\omega)$.
 Forcément on a un seul sous espace propre , car sinon $n = \dim \mathbb{R}^n = 2 \dim \text{Im } M(\omega)$, contredit le fait que n est paire . Ainsi si n impair alors $Z = V$ et $\mathbb{P}(Z) = p^n + q^n$.
- (c) $n = 2r$. D'après la question 2. on a $\mathbb{P}(T = r) = \binom{2r}{r} p^r q^r$.
 On a $\omega \in Z$ alors $\dim \text{Ker } M(\omega) = \dim \text{Im } M(\omega) = r$ donc $Z = [R = r] = [T = r]$.
 Ainsi $\mathbb{P}(Z) = \binom{2r}{r} p^r q^r$.

6. .

- (a) Soit $\omega \in \Omega$, on a

$$A = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(\omega) & \cdots & X_n(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(\omega)^2 & X_1(\omega)X_2(\omega) & \cdots & X_1(\omega)X_n(\omega) \\ X_1(\omega)X_2(\omega) & X_2(\omega)^2 & \cdots & X_2(\omega)X_n(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1(\omega)X_n(\omega) & X_2(\omega)X_n(\omega) & \cdots & X_n(\omega)^2 \end{pmatrix}$$

pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ on a $a_{i,j}(\omega) = X_i(\omega)X_j(\omega)$.

- (b) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $X_i(\Omega) = X_j(\Omega) = \{0, 1\}$ donc $a_{i,j}(\Omega) = \{0, 1\}$.
 On a :
 $\triangleright [a_{i,j} = 1] = [X_i = 1] \cap [X_j = 1]$, X_i et X_j sont indépendantes donc :

$$\mathbb{P}(a_{i,j} = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1) = p^2$$

$$\triangleright \mathbb{P}(a_{i,j} = 0) = 1 - \mathbb{P}(a_{i,j} = 1) = 1 - p^2.$$

D'où $a_{i,j} \sim \mathcal{B}(p^2)$.

- (c) Soit $\omega \in \Omega$, on a $\text{tr}(A(\omega)) = \sum_{i=1}^n X_i^2(\omega)$, or les $X_i(\omega) \in \{0, 1\}$ donc $X_i^2(\omega) = X_i(\omega)$, d'où $\text{tr}(A(\omega)) = \sum_{i=1}^n X_i(\omega)$ et $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n X_i$.

- (d) Soit $\omega \in \Omega$. Remarquons que les colonnes de $A(\omega)$ sont colinéaires à $\begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$, si ce vecteur est non nul alors $\text{rg } A(\omega) = 1$
 sinon $\text{rg } A(\omega) = 0$. Donc la variable aléatoire $\text{rg}(A)$ prend les valeurs 0 ou 1.

- (e) Soit ω dans Ω .
 $\triangleright$ Si $A(\omega) = 0$ alors $\text{Sp}(A(\omega)) = \{0\}$.
 $\triangleright$ Si $A(\omega) \neq 0$ alors $\text{rg}(A(\omega)) = 1$. Le noyau est de dimension $n-1$, on prend une base de $\text{Ker } A$ est on la complète par un vecteur en une base de $\mathbb{R}^n$, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est égale à $\text{diag}(\lambda, 0, \dots, 0)$, cette dernière matrice est semblable à $A(\omega)$, ce qui donne $\lambda = \text{tr } A(\omega)$ et $\text{Sp}(A(\omega)) = \{0, \text{tr } A(\omega)\}$.
- (f) La variable aléatoire $\text{rg}(A)$ prend les valeurs 0 ou 1.
 Soit ω dans Ω . $\text{rg}(A(\omega)) = 0$ est équivalent à $A(\omega) = 0$ et à $X_1(\omega) = \dots = X_n(\omega) = 0$, donc

$$[\text{rg}(A) = 0] = \bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} [X_i = 0]$$

L'indépendance des X_i donne

$$\mathbb{P}(\text{rg}(A) = 0) = \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mathbb{P}[X_i = 0] = q^n$$

Donc $\mathbb{P}(\text{rg}(A) = 1) = 1 - \mathbb{P}(\text{rg}(A) = 0) = 1 - q^n$.
 La variable aléatoire $\text{rg}(A)$ suit la loi $\mathcal{B}(1 - q^n)$.

Fonctions génératrices

Solution de 40 :

On introduit la fonction génératrice de X :

$$G_X(t) = a \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(pt)^k$$

Puisque

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

on obtient

$$G_X(t) = \frac{a}{(1-pt)^2}$$

Sachant $G_X(1) = 1$, on en tire la valeur de a

$$a = (1-p)^2$$

On peut ensuite calculer espérance et variance

$$E(X) = G'_X(1) = \frac{2p}{1-p} \quad \text{et} \quad V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = \frac{2p}{(1-p)^2}$$

Solution de 41 : Dés pipables ?

La fonction génératrice d'une variable Y suivant une loi uniforme sur $\llbracket 2, 12 \rrbracket$ est la fonction polynomiale

$$G_Y(t) = \frac{1}{12} (t^2 + t^3 + \dots + t^{12})$$

Notons G_{X_1} et G_{X_2} les fonctions génératrices de chacun des dés.

$$G_{X_1}(t) = (p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_6 t^6) \quad \text{et} \quad G_{X_2}(t) = (q_1 t + q_2 t^2 + \dots + q_6 t^6).$$

La fonction génératrice de la somme $X_1 + X_2$ est donnée par

$$G_{X_1+X_2}(t) = G_{X_1}(t) \times G_{X_2}(t) = t^2 (p_1 + p_2 t + \dots + p_6 t^5) (q_1 + q_2 t + \dots + q_6 t^5).$$

Pour que $G_Y = G_{X_1} G_{X_2}$, il faut $p_1 q_1 > 0$ et $p_6 q_6 > 0$ auquel cas les facteurs de degré 5 possèdent chacune une racine réelle non nulle. Cependant

$$G_Y(t) = \frac{1}{12} t^2 \frac{1-t^{11}}{1-t}$$

n'en possède pas !

Solution de 42 : Temps d'attente : loi de Pascal par les fonctions génératrices

- T_1 suit une loi géométrique de paramètre p .
- Notons $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des variables de Bernoulli testant la réussite de chaque expérience. L'évènement $(T_m = n)$ est la réunion correspond à l'évènement $X_1 + \dots + X_n = m$ et $X_n = 1$ soit encore $X_1 + \dots + X_{n-1} = m-1$ et $X_n = 1$. Par indépendance

$$\mathbb{P}(T_m = n) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{n-1} = m-1) \mathbb{P}(X_n = 1).$$

Puisque $X_1 + \dots + X_{n-1} \sim \mathcal{B}(n-1, p)$ et $X_n \sim \mathcal{B}(p)$, on obtient

$$\mathbb{P}(T_m = n) = \binom{n-1}{m-1} p^m (1-p)^{n-m}$$

et cette écriture vaut aussi quand $n \leq m$ car le coefficient binomial est alors nul.

- En exploitant le développement connu de $(1+u)^a$, on obtient

$$\frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{m-1} t^n \quad \text{pour } t \in]-1, 1[$$

- Par définition

$$G_{T_m}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n-1}{m-1} p^m (1-p)^{n-m} t^n$$

En isolant les premiers termes nuls et en décalant l'indexation

$$G_{T_m}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{m-1} (pt)^m ((1-p)t)^n = \frac{(pt)^m}{(1-(1-p)t)^m}$$

Comme G_{T_m} est deux fois dérivable en 1, $T_m \in L^2$ et on en déduit

$$\mathbb{E}(X) = G'_{T_m}(1) = \frac{m}{p}$$

Puis

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_{T_m}(1) = \frac{m(m-2p+1)}{p^2}$$

donc

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{m(m-2p+1)}{p^2} + \frac{m}{p} - \frac{m^2}{p^2} = \frac{m(1-p)}{p}$$

(et on retrouve dans le cas $m=1$ l'espérance et la variance pour une loi géométrique.)

5. Si $X_1, \dots, X_m$ sont des v.a. de loi $\mathcal{G}(p)$, $S_m = \sum_{k=1}^m X_k$, $G_{S_m} = (G_{X_1})^m = \left(\frac{pt}{1-(1-p)t} \right)^m = G_{T_m}$ donc

$$S_m \sim T_m \text{ suit une loi de Pascal de paramètre } (m, p).$$

Solution de 43 : Loi binomiale ; loi de Poisson et gestion de stock (situation type Wald)

1. $T = \sum_{j=1}^N X_j$ (qui est bien nul si $N = 0$). Attention ce n'est pas une somme classique de v.a. de même loi de Bernoulli car leur nombre est aussi une variable aléatoire (N).

$$\mathbb{P}(T = k) = \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(T = k | N = n) \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n \geq k} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^n X_j = k\right) \mathbb{P}(N = n) \text{ (formule des probabilités totales, sce associé à } N) \text{ donne}$$

$$\mathbb{P}(T = k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \text{ car } \sum_{j=1}^n X_j \sim \mathcal{B}(n, p). \text{ Donc } T \sim \mathcal{P}(\lambda p).$$

$$\mathbb{P}(T \leq s) = e^{-\lambda p} \sum_{k=0}^s \frac{(\lambda p)^k}{k!}.$$

2. (a) On trouve $G_S(t) = G_N(G_{Y_1}(t)) = \exp(\lambda(-5/6 + t/2 + t^2/3))$: c'est l'identité de Wald vu en cours. On commence par réécrire $G_S(t)$ en utilisant la formule des probabilités totales avec sce ($N = n$), puis on utilise Fubini (la sommabilité ne posant pas de problème, quitte à rajouter des valeurs absolues, on obtient $G_S(|t|) < +\infty$), ce qui permet de reconnaître $G_n \circ G_{Y_1}$ après avoir utilisé $G_{S_n} = G_{Y_1}^n$ où $S_n = \sum_{j=1}^n Y_j$ somme de v.a.i.

(b) On trouve $\mathbb{P}(S = 3) = \frac{G_S'''(0)}{3!} = \frac{\lambda^3 + 8\lambda^2}{48} e^{-\frac{5\lambda}{6}}$ soit, pour $\lambda = 6$, $\frac{21}{2} e^{-5} \approx 0,07$.

(c) La double dérivabilité de G_S en 1 donne l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(S)$ et de la variance $\mathbb{V}(S)$.

On calcule alors $G_S'(1) = \mathbb{E}(S) = \frac{7\lambda}{6}$ et $G_S''(1) = \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S) = \frac{2\lambda}{3} + \left(\frac{7\lambda}{6}\right)^2$ donc $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S)^2 = \frac{11\lambda}{6}$, ce qui donne

respectivement 7 et 11 pour $\lambda = 6$.