D'après

CCINP 2023 MP–MPI
Mathématiques 1 et 2

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Ce sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème 1 : Analyse

Dans tout le problème, α est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Partie I – Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

1. Démontrer que $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.
2. Démontrer que $J(\alpha) = I(1-\alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

3. **1re tentative**

   Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $f_n(x) = (-1)^n x^{n+\alpha-1}$. Montrer que $\forall x \in]0,1[\,,\ \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

   La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?
4. **2e tentative**

   Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1}$

   À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que $I(\alpha) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x$

   En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.
5. En déduire que $I(\alpha) + J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

On admet la formule suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2 - n^2} \right).$$

6. Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Partie II – Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite, on pose

$$\forall x \in \,]0,+\infty[\,, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

et

$$\forall x \in [0,+\infty[\,, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} \, dt$$

7. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.
8. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.
9. Démontrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
10. Déterminer $\lim\limits_{x\to\infty} f_\alpha(x)$.
11. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En déduire

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t$$

Partie III – Vers la formule des compléments

12. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, démontrer que $f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$
13. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.
En déduire que $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

14. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} \, \mathrm{d}t = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t$$

15. Démontrer l'identité suivante (formule des compléments)

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

16. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

Problème 2 : Algèbre

Dans ce problème, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Partie I

1. **Un exemple**

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

2. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux :
si $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T, si u est un endomorphisme de E, alors :

$$\mathrm{Ker}[T(u)] = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u)) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(P_r(u)).$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.
Soit u un endomorphisme de E et soient P et Q deux polynômes premiers entre eux.
Justifier que $\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a $\mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$).
Démontrer que $\mathrm{Ker}[(PQ)(u)] = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$.

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

3. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal.
   On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.
   Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$R_1 Q_1 + R_2 Q_2 + \dots + R_m Q_m = 1.$$

4. On pose alors, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.
   Démontrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\{1, 2, \dots, m\}$, on a les trois résultats suivants :

   $$p_i \circ p_j = 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = id_E, \qquad \text{et chaque } p_i \text{ est un projecteur de } E.$$

   Les p_i seront appelés projecteurs associés à u.
5. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique :

   $$\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

   (avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $N_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique associé à λ_i.
   Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_m$.

6. Démontrer que $E = \mathrm{Im}\ p_1 \oplus \mathrm{Im}\ p_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\ p_m$.

7. Démontrer que, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $N_i = \mathrm{Im}\ p_i$.

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

1. Quel est alors le polynôme minimal π_u de u ?

2. On note toujours, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.
   Donner sans détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$, puis démontrer que les projecteurs associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p_i = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

3. Démontrer que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u).

4. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable et calculer la matrice A^2.
   (b) En déduire le polynôme minimal π_A de la matrice A puis la décomposition spectrale de la matrice A. On notera Π_1 et Π_2 les matrices des projecteurs associés.
   (c) Calculer, pour tout entier naturel q, A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2.

FIN