1.2 D - MATHEMATIQUES II - filière MP

I) <u>REMARQUES GENERALES</u>

L'objet du problème est l'étude des racines du polynôme $P_n(X)= X(X-1)\dots(X-n)$. Les parties I et II sont indépendantes, la troisième s'appuie sur un résultat obtenu en partie II.

La première partie montre la croissance des parties fractionnaires des racines de P_n. Elle fait appel à des notions très élémentaires : propriétés élémentaires des polynômes, théorème de Rolle, étude de fonctions. Cette partie est assez souvent correctement traitée, même si les questions 8) et 10), plus subtiles, sont fréquemment laissées de côté ou très mal rédigées.

La partie II consiste en l'étude de quelques propriétés de la fonction Gamma. Les premières questions reprennent des résultats classiques, les questions 18 à 23) ont pour objet la preuve d'un résultat de convergence plus original. On peut regretter que la question 14), qui consiste en une application du théorème de dérivation sous le signe intégral, soit aussi souvent mal traitée.

La troisième partie est assez sélective, mais le jury a eu l'agréable surprise de la voir souvent correctement abordée.

II) <u>REMARQUES PARTICULIERES</u>

Question 1

C'est une application immédiate du théorème de Rolle. Certains candidats ont perdu du temps à vérifier directement l'alternance du signe des dérivées en les racines de P_n pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué !

Question 2

Les calculs sont rarement menés à terme correctement. Certains candidats laissent le soin au correcteur de terminer ces calculs, par exemple en ne calculant pas la somme des n premiers entiers : il va sans dire que l'on attend une expression simplifiée ! Certains trouvent une somme négative pour les $x_{n,k}$: ceci permet de rappeler que prendre quelques secondes pour vérifier la cohérence d'un résultat peut éviter bien des erreurs.

Questions 3 et 4

Ces questions très simples sont en général faites correctement. Il fallait bien sûr réordonner correctement les racines de $P_n(n-X)$ pour conclure.

Question 5

Question en général bien traitée, sauf par quelques candidats qui se trompent sur le degré de P_n.

Question 6

Il est facile de voir que le signe de $(-1)^{n-k}P_n(x_{n,k})$ est indépendant de k. Un rapide examen du tableau de variation permet de conclure. Question en général bien traitée.

Question 7

Cette question simple est souvent bien traitée : il suffit de dériver la relation fournie par l'énoncer.

Question 8

Cette question, qui demande un peu plus de réflexion, est assez rarement traitée et encore plus rarement bien rédigée. Sur cette question, un petit tableau de signe permettait d'éviter de longs discours.

Question 9

Question très proche de la question 7) et assez souvent traitée correctement.

Question 10

L'argument est le même que la question 8).

Question 11
Il suffisait de rassembler les résultats de 8) et 10) pour conclure.

La partie II étudiait quelques propriétés de la fonction Γ. Bien que l'étude de la fonction Γ soit explicitement au programme, les premières questions très classiques ne sont pas toujours bien traitées. En particulier, l'application du théorème de dérivation sous le signe intégral pose problème.

Question 12
Le résultat est souvent juste, la preuve moins souvent. De nombreux candidats affirment que $t^{x-1}\, e^{-t}$ est équivalent à e^{-t} en $+\infty$ pour se débarrasser à bon compte du terme t^{x-1} !

Question 13
Pour rester dans le cadre des outils du programme, il fallait invoquer la continuité de l'intégrant pour conclure.

Question 14
Question rarement bien traitée. Il fallait bien sûr se retreindre à un compact de ε pour appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$. La vérification de l'hypothèse de domination est souvent complètement omise ou incorrecte.

Question 15
Question classique souvent bien traitée.

Question 16
Cette question repose sur une application judicieuse de Cauchy-Schwarz (mais il est important de préciser à quelles fonctions on l'applique).

Question 17
C'est une application directe de la question 15). Beaucoup de candidats démontrent ce résultat en faisant une nouvelle intégration par partie, ce qui est une perte de temps bien inutile. Il est important de réfléchir un peu avant de se lancer dans des calculs fastidieux !

Question 18
La différence $\phi(n+1) - \phi(n)$ étant connue, il suffit de prendre un équivalent du terme général de la série pour conclure. Ceux qui sont arrivés jusque là traitent souvent cette question sans difficulté.

Question 19
C'est une application très simple de 18). Il est tout de même important de veiller à ne pas se tromper sur le premier terme en écrivant la série télescopique.

Question 20
Il fallait faire un encadrement de $\phi(x)$ en utilisant la croissance $\psi(x)$ et la décroissance de $-ln(x)$. Cette question a conduit à de nombreux raisonnements farfelus, la palme revenant à "En utilisant la densité de IN dans IR..." retrouvée dans plusieurs copies par ailleurs assez correctes. Il est bon de rappeler que le désir de conclure un raisonnement ne doit pas amener à de telles divagations qui mettent le correcteur dans de mauvaises dispositions.

Question 21
Cette question est rarement bien traitée. Il est important de rappeler que l'on attend une preuve du résultat et non l'invocation d'un théorème hors programme.

Question 22
Il fallait penser à calculer l'intégrale de 21) pour x entier et utiliser la formule de Stirling. Cette question plus difficile est rarement traitée.

Question 23
Question assez souvent abordée. Beaucoup invoquent l'équivalence de $ln(m)$ et $ln(x+m)$ quand m tend vers $+\infty$, ce qui est insuffisant pour conclure.

La partie III consiste en l'étude de la répartition asymptotique des racines normalisées de P_n'. Il est particulièrement remarquable que l'on puisse décrire explicitement cette répartition à l'aide d'une fonction simple. Cette partie utilise la partie II et la formule des compléments rappelée dans le cours du problème.

Question 24

Cette question est assez simple, il suffit de considérer la dérivée logarithmique de P_n, puis de réordonner les termes. Elle est assez souvent faite correctement.

Question 25

Cette question est une des plus difficiles du problème. Seuls quelques candidats la résolvent parfaitement. Il faut appliquer la question 24) et le résultat principal de la partie II, mais pour être parfaitement rigoureux il faut préciser que le résultat de convergence de la partie II peut être obtenu uniformément pour $x \in]0,1[$. La plupart des candidats qui abordent cette question passent à côté de cette subtilité, ce qui est excusable !

Question 26

Cette question est aussi assez difficile. Il faut penser à considérer la dérivée logarithmique de la formule des compléments pour identifier $\Psi(x) - \Psi(1-x)$. On peut alors inverser le résultat de convergence obtenu en 25 (ce qui est assez rarement fait proprement).

III) CONSEILS AUX CANDIDATS

On ne saurait trop recommander aux candidats de lire en entier le sujet avant de commencer : une vision plus claire des buts poursuivis peut donner de précieuses indications pour certaines questions.

Il est impératif d'avoir une idée claire de la solution avant de commencer à rédiger. Il est alors essentiel de mettre en relief les arguments clefs de la réponse. Par exemple, dans la question 14) l'argument clef est la majoration uniforme sur les compacts : il faut le faire apparaître dans la rédaction.

Il est évident qu'une condition nécessaire à la réussite à une épreuve de concours est une bonne connaissance du programme et des théorèmes du cours. Par exemple, une bonne connaissance des propriétés élémentaires de la fonction Gamma et de leurs preuves permettait de répondre à plusieurs questions. Une bonne maîtrise du théorème de dérivation sous le signe intégral (ou somme) est très souvent indispensable.