Programme de colle – MPI

1. Probabilités

Reprise de l'ensemble du chapitre pour exercices auquel s'ajoute

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
k) Fonctions génératrices	
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t)=\mathrm{E}(t^X)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\,t^k$.	La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X.
Détermination de la loi de X par G_X.	
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X)=G_X{}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour le calcul de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	

2. Espaces préhilbertiens réels (révisions de MP2I)

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire	
Produit scalaire.	Notations $\langle x,y\rangle$, $(x\vert y)$, $x\cdot y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien.	
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.	Expressions $X^\top Y$, $\mathrm{tr}(A^\top B)$.
Produit scalaire $\langle f,g\rangle=\int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.	Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Identité remarquable $\Vert x+y\Vert^2=\Vert x\Vert^2+\Vert y\Vert^2+2\langle x,y\rangle$.	Formule de polarisation associée.
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	
d) Bases orthonormales	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan.
Distance d'un vecteur à F. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	Notation $d(x,F)$. En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$; distance de x à $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.

À cela s'ajoute la notion de symétrie orthogonale, le théorème de représentation de Riesz des formes linéaires et la notion de produit mixte.

Semaine prochaine : Espaces vectoriels normés.

3. Questions de cours

(i) Fonctions génératrices des lois du programme, et déduction de leur espérance et variance.

(ii) **Toujours beaucoup d'exercices CCINP cette semaine.**
Les membres du groupe ✻ peuvent éventuellement aussi être interrogés sur les exercices 39, 76, 92, 96, 110, 111.

(iii) **✻ Lemme de Borel-Cantelli**
Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements.

1. On suppose que $\sum\mathbb{P}(A_n)<+\infty$. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty}A_n\right)\right)=0.$$
Traduction ?
2. On suppose $\sum\mathbb{P}(A_n)=+\infty$ et les A_n indépendants. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty}A_n\right)\right)=1.$$
3. (a) Donner la probabilité, lorsqu'on lance $2n$ fois une pièce équilibrée ($n\geqslant 1$), d'obtenir exactement n fois Pile et n fois Face. Calculer un équivalent de cette probabilité, en utilisant par exemple la formule de Stirling.
   (b) Trois parties équitables de Pile ou Face, indépendantes, se déroulent simultanément sur trois tables. Montrer que, presque sûrement, il y a au plus un nombre fini d'instants auxquels on a égalité simultanément sur les trois tables de jeux (ie un nombre fini de n tels qu'après $2n$ lancers, on ait à chaque table obtenu exactement n fois Pile et n fois Face).

(iv) **✻ Identité de Wald**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de même loi et d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'espérance finie tel que N et toutes les X_n soient indépendantes.

Déterminer la fonction génératrice de $Y=\sum_{\ell=1}^{N} X_\ell$ (on admet que c'est bien une variable aléatoire discrète) et en déduire l'identité de Wald

$$\mathbb{E}\left(\sum_{\ell=1}^{N} X_\ell\right)=\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1).$$

Retrouver l'identité sans utiliser les fonctions génératrices.

(v) **✻ Théorème de Beppo-Levi (convergence monotone)**

On considère une suite croissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires L^1, définies sur un univers probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose de plus que la suite numérique $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On note X la limite simple de (X_n), à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, en admettant qu'il s'agit bien d'une variable aléatoire discrète.

1. Montrer que, pour tout $j\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n\geqslant j)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{P}(X\geqslant j)$.
2. En déduire que X est presque sûrement finie.
3. Montrer que X est d'espérance finie, et que

$$\mathbb{E}(X_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{E}(X).$$

(vi) ✻ Supplémentarité de l'orthogonal d'un sous-espace de dimension finie, expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale du sous-espace. La distance à un sous-espace de dimension finie est atteinte en un vecteur unique.

4. Exercices CCINP

- **CCINP 39**

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$ et $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y)=\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.

On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$.

2. ~~Soit $p\in\mathbb{N}$. Pour tout $x=(x_n)\in\ell^2$, on pose $\varphi(x)=x_p$.~~
   ~~Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.~~
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\cdot|\cdot)$). Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

- **CCINP 76** : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.
On pose $\forall x\in E$, $\|x\|=\sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E=\{f\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x\in[a,b]\ f(x)>0\}$. Prouver que l'ensemble

$$\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\times\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\,,\ f\in E\right\}$$

   admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

- **CCINP 77** : Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp=A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$.
   (b) Démontrer que $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$.

- **CCINP 79** : Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=0 \Longrightarrow h=0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose $\forall(f,g)\in E^2$, $(f|g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- **CCINP 80** : Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\left(f\,|g\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f:x\mapsto\cos x$ et $g:x\mapsto\cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u:x\mapsto\sin^2 x$.

- **CCINP 81** : On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A,A')=\operatorname{tr}(A^\intercal A')$, où $\operatorname{tr}(A^\intercal A')$ désigne la trace du produit de la matrice $A^\intercal$ par la matrice A'. On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathscr{F}=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1. Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathscr{F}^\perp$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.

CCINP 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n>0$.

On admet que, pour tout $x\in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x-y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x-y_0\|$.

Pour $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ et $A'=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}$, on pose $(A|A')=aa'+bb'+cc'+dd'$.

1. Démontrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2\end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

CCINP 92

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose $\forall(A,B)\in E^2$, $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(A^\intercal B)$ où tr désigne la trace et $A^\intercal$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^\intercal=-A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E=S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp=S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E. Déterminer $F^\perp$.

CCINP 96

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n)=p_n$.

La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t)=\mathbb{E}\left[t^X\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}p_nt^n$.

1. Prouver que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $S=X_1+X_2$.
   Démontrer que $\forall t\in]-1,1[$, $G_S(t)=G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$:
   (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
   (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t)=\mathbb{E}\left[t^X\right]$.
   Remarque : on admetra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
   On note S_n la somme des numéros tirés.
   Soit $t\in]-1,1[$. Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

CCINP 101

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t=0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n\in\mathbb{N}$.

On note A_n l'événement « l'animal est en A après son n^e trajet ».
On note B_n l'événement « l'animal est en B après son n^e trajet ».
On note C_n l'événement « l'animal est en C après son n^e trajet ».

On pose $\mathbb{P}(A_n)=a_n$, $\mathbb{P}(B_n)=b_n$ et $\mathbb{P}(C_n)=c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D=P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

CCINP 106

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(Y=k)=pq^k$ où $p\in]0,1[$ et $q=1-p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U=\sup(X,Y)$ et $V=\inf(X,Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega)=\mathbb{N}$ et que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(V=n)=pq^{2n}(1+q)$.
3. Prouver que $W=V+1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

CCINP 109

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

CCINP 110

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n \mathbb{P}(X=n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
   On pose $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X=n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé de $[-1,1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $\mathbb{P}(X=k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.

CCINP 111

On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et

$$\forall\, x \in]-1,1[,\ \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}.$$

Soit $p \in]0,1[$.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) est donnée par

$$\forall\,(k,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.

   (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.

   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.