Programme de colle – MPI

1. Séries entières

Extrait du programme officiel :

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe. Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\|z\| < \|z_0\|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Rayon de convergence d'une série entière, défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$, de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	
Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\|z\| < R$, et elle diverge grossièrement si $\|z\| > R$.
Si $a_n = O(b_n)$ et donc en particulier si $a_n = o(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.	Rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon. Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	La limite du rapport $\dfrac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}$ peut être utilisée directement.
b) Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe	
Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence. Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.	
c) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle	
Théorème d'Abel radial : si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \to R^-}{\longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.	La démonstration est hors programme.
La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.	Si les fonctions $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un intervalle $]0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.
d) Fonctions développables en série entière, développements usuels	
Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R, sur l'intervalle $]-R, R[$. Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$. Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C}, \|z\| < 1\}$.	Dans le cas réel, lien avec la série de Taylor.
Développements usuels dans le domaine réel.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

2. Probabilités

Extrait du programme officiel :

Cette section généralise aux variables aléatoires discrètes l'étude menée en première année des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini. Cette généralisation nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités, lesquelles font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- ★ *la notion de tribu, introduite pour donner un cadre rigoureux, n'appelle aucun développement théorique ;*
- ★ *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;*
- ★ *les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.*

La théorie des familles sommables permet une extension très naturelle des notions et résultats vus en première année. Cette extension est effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour les exemples et exercices. L'objectif de l'enseignement est en effet de renforcer la compréhension de l'aléatoire, en lien avec d'autres parties du programme. On pourra ainsi faire travailler les étudiants sur divers objets aléatoires (permutations, graphes, matrices…) les inégalités de concentration et des exemples de processus à temps discret (marches aléatoires, chaînes de Markov…).

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
b) Espaces probabilisés	
Tribu sur un ensemble Ω. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.	La manipulation de tribus n'est pas un objectif du programme.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Probabilité sur un espace probabilisable, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Propriété de sous-additivité de P pour une réunion dénombrable d'événements.	
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).	Systèmes quasi-complets d'événements. Tout développement supplémentaire sur ces notions est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles et indépendance	
Extension des résultats vus en première année : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.	Notations $P_B(A)$, $P(A\|B)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Par définition, les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. Famille d'événements indépendants.	Lorsque $P(B)>0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\mid B)=P(A)$. L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	

d) Espaces probabilisés discrets

Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et de somme 1.	Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable.
Probabilité définie sur $\mathscr{A}=\mathscr{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω.	Si Ω est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathscr{P}(\Omega)$.

e) Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire discrète X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et à valeurs dans E est une application définie sur Ω, à valeurs dans l'ensemble E, telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que, pour tout $x\in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ appartienne à $\mathscr{A}$.	Notations $(X=x)$, $(X\in A)$, $\{X=x\}$, $\{X\in A\}$. Lorsque $E=\mathbb{R}$, la variable aléatoire X est dite réelle. Notations $(X\leqslant x)$,$(X\geqslant x)$,$(X<x)$,$(X>x)$ (et analogues avec accolades) pour une variable aléatoire réelle X.
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X.	La loi de X peut au besoin être définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$.
Dans ce qui suit, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes. La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités discrète $(P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$. Notation $X\sim Y$.	La notation $X\sim Y$ ne suppose pas que X et Y sont définies sur le même espace probabilisé.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X\sim Y$ alors $f(X)\sim f(Y)$. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales. Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe.	Un couple est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x,Y=y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

f) Variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires indépendantes, famille finie de variables aléatoires indépendantes.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de (X,Y) est le produit des distributions de probabilités de X et Y. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
Famille quelconque de variables aléatoires indépendantes.	
Fonctions de variables aléatoires indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$	Extension au cas de plus de deux variables.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	La démonstration est hors programme. Suites i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

g) Lois usuelles

Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p. Variable géométrique de paramètre p.	Notations $\mathscr{G}(p)$, $X\sim\mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans le jeu de pile ou face infini.
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ.	Notations $\mathscr{P}(\lambda)$, $X\sim\mathscr{P}(\lambda)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Variable de Poisson de paramètre λ.	Interprétation en termes d'événements rares.

h) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$, l'espérance de X est la somme, dans $[0,+\infty]$, de la famille $(x\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$. Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, égalité $\mathrm{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X\geqslant n)$.	Notation $\mathrm{E}(X)$.
Une variable aléatoire complexe X est dite d'espérance finie si la famille $(x\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X.	Notation $\mathrm{E}(X)$. Variables centrées. La notation $X\in L^1$ signifie que X est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^1.
Espérance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson. Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs complexes ; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)\,P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; si tel est le cas : $\mathrm{E}\big(f(X)\big)=\sum_{x\in X(\Omega)}f(x)\,P(X=x)$.	
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance nulle.
Si $\lvert X\rvert\leqslant Y$ et si $Y\in L^1$, alors $X\in L^1$. Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors XY est dans L^1 et : $$\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	Extension au cas de n variables aléatoires.

i) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Si $\mathrm{E}\big(X^2\big)<+\infty$, X est d'espérance finie.	La notation $X\in L^2$ signifie que X^2 est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^2.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont dans L^2, XY est dans L^1 et $\mathrm{E}(XY)^2\leqslant\mathrm{E}\big(X^2\big)\,\mathrm{E}\big(Y^2\big)$. Pour $X\in L^2$, variance et écart type de X.	Cas d'égalité. Notations $\mathrm{V}(X)$,$\sigma(X)$. Variables réduites. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.
Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\big(X^2\big)-\mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X)>0$, la variable aléatoire $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson. Covariance de deux variables aléatoires de L^2. Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes. Variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables décorrélées.	

j) Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon>0$, $$P\left(\left\lvert\frac{S_n}{n}-m\right\rvert\geqslant\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$ où $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ et $m=\mathrm{E}(X_1)$.	Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration.

Pas de fonction génératrice cette semaine.
Semaine prochaine : Fonctions génératrices, révisions des espaces préhilbertiens réels.

3. Questions de cours

(i) Liste des développements en série entière des fonctions usuelles au programme.

(ii) Pour chaque loi au programme (Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson) : Loi, situation type (si adapté), espérance et variance (avec justifications).

(iii) ✻ Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ à l'aide d'une équation différentielle.

(iv) ✻ Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

(v) ✻ **Fonction de répartition et fonction caractéristique**

1. Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction

$$F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{P}(X \leqslant x).$$

   a. Montrer que F_X est croissante et déterminer ses limites en $\pm\infty$.
   b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(t) \xrightarrow[t\to x^+]{} \mathbf{P}(X \leqslant x)$ et $F_X(t) \xrightarrow[t\to x^-]{} \mathbf{P}(X < x)$.
   c. En déduire que deux variables aléatoires réelles ont même loi si et seulement si leurs fonctions de répartition sont égales.

2. On appelle **fonction caractéristique** d'une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{Z}$, l'application $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ donnée par $\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)$.
   a. Vérifier que φ_X est définie, continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.
   b. On suppose que X admet une espérance. Vérifier que φ_X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\mathbb{E}(X)$ à l'aide de φ_X'.
   Que peut-on dire si X est de variance finie ? Exprimer alors $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de φ_X.

(vi) ✻ **Inégalités de Chernov et de Tchebychev-Cantelli**

(a) Soit X une variable aléatoire discrète réelle centrée et vérifiant $|X| \leqslant 1$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbf{E}\left(e^{\lambda X}\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

(b) Soit X une variable aléatoire discrète réelle qui admet un moment d'ordre 2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbf{P}(X \geqslant \mathbf{E}(X) + \lambda) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \lambda^2}.$$

(vii) **Beaucoup d'exercices CCINP cette semaine.**
Les membres du groupe ✻ peuvent éventuellement aussi être interrogés sur les exercices 18, 19, 24, 32, 47, 97, 100, 102, 103, 104, 108.

4. Exercices CCINP

- **CCINP 2** : On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.
  1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
  2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$).
  Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
  3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.
  On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
  Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
  (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

- **CCINP 18** : On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.
  On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
  1. Étudier la convergence simple de cette série.
  On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
  2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
  (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
  (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

- **CCINP 19**
  1. (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation des séries de fonctions, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.
  Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_n x^n$ et la série $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.
  (b) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
  2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.
  (b) Rappeler les résultats sur le produit de Cauchy de deux séries entières.
  (c) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe $z \mapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

- **CCINP 22** :
  1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
  2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.
  La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$?
  En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

- **CCINP 23** : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.
  1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ ont le même rayon de convergence.
  On le note R.
  2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

- **CCINP 24** :
  1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$. On pose $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$.
  2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x\mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
  3. (a) Déterminer $S(x)$.

     (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
     $$f(0)=1,\quad f(x)=\mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x>0,\quad f(x)=\cos\sqrt{-x} \text{ si } x<0\,.$$
     Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

- **CCINP 32** : Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.
  1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$. Déterminer la somme des séries entières obtenues.
  2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

- **CCINP 47** : Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :
  1. $\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n x^{2n}}{n}$.
  2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n}=4^n \\ a_{2n+1}=5^{n+1}\end{cases}$

- **CCINP 51** :
  1. Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

     On se propose de calculer la somme de cette série.
  2. Donner le développement en série entière en 0 de $t\longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
     Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
  3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x\longmapsto \mathrm{Arcsin}\,x$ ainsi que son rayon de convergence.
  4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

- **CCINP 97** : Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par
  $$\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big((X,Y)=(j,k)\big)=\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\,j!\,k!}.$$
  1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
  2. Prouver que $\mathbb{E}\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

- **CCINP 98** : Un secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
  On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p (où $p\in]0,1[$).
  Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.
  1. Donner la loi de X. Justifier.
  2. Le secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

     (a) Soit $i\in[\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y=k\mid X=i)$.

     (b) Prouver que $Z=X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

     Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

     (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

- **CCINP 99** :
  1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ Y_n\in L^2$. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}Y_k$.

     Prouver que $\forall\, a\in]0,+\infty[,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n}-E(Y_1)\right|\geqslant a\right)\leqslant\frac{V(Y_1)}{na^2}$.
  3. **Application**
     On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
     À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0{,}35$ et $0{,}45$?
     Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i^{e} tirage.

- **CCINP 100** : Soit $\lambda\in]0,+\infty[$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n)=\frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.
  1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x)=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
  2. Calculer λ.
  3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
  4. X admet-elle une variance ? Justifier.

- **CCINP 102** : Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.
  1. Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
  2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$ c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$,
  $$Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)),$$
  $\min$ désignant « le plus petit élément de ».
     (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y \leqslant n)$, puis $\mathbb{P}(Y = n)$.
     (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

- **CCINP 103** : **Remarque** : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
  1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0,+\infty[)^2$.
     Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
     On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
     Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
     (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
  2. Soit $p \in]0,1]$. Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
  Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
  On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
  On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
  Déterminer la loi de X.

- **CCINP 104** : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.
  1. Préciser les valeurs prises par X.
  2. (a) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = 2)$.
     (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
  3. (a) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
     (b) Déterminer la limite de $\mathbb{E}(X)$ lorsque $n \to +\infty$. Interpréter ce résultat.

- **CCINP 105** :
  1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
  2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués). Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
     (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
     (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
     (c) Déterminer la limite de (p_n). Interpréter ce résultat.

- **CCINP 107** : On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
  * On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
  * On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
  * Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
  * Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au n^{e} tirage est blanche » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.
  1. Calculer p_1.
  2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
  3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

- **CCINP 108** : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}\, j!}$
  1. Déterminer les lois de X et de Y.
  2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
     (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
  3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
  4. Calculer $P(X = Y)$.