

Centrale 2012, filière MP, seconde épreuve

• Partie I

A. $J_x \neq \emptyset$ car $0 \in J_x$.

Soient A et B dans J_x . $(A + B)(\sigma)(x) = A(\sigma)(x) + B(\sigma)(x) = 0$, donc $A + B \in J_x$.

Soient A dans J_x et B dans $\mathbb{K}[X]$. $(AB)(\sigma)(x) = (B(\sigma) \circ A(\sigma))(x) = B(\sigma)(0) = 0$, donc $AB \in J_x$.

J_x est donc un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et, par définition même d'une SRL, il n'est pas réduit à $\{0\}$.

B.1) La seule SRL d'ordre 0 est la suite nulle.

Les SRL d'ordre 1 sont les suites géométriques.

$(X - 1)^2 \in J_x$ ssi $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc ssi x est de la forme $n \mapsto an + b$ et $X - 1 \in J_x$ ssi x est constante. Les SRL dont le polynôme minimal est $(X - 1)^2$ sont donc les suites de la forme $n \mapsto an + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$; autrement dit, ce sont les suites arithmétiques non constantes.

B.2) $(X + 1)^3 \in J_x$, donc le polynôme minimal de x est de la forme $(X + 1)^k$, avec $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

x n'est pas une suite géométrique de raison -1 , donc $k \geq 2$.

On vérifie immédiatement par récurrence que $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en conclut que le polynôme minimal de x est $(X + 1)^2$ et que l'ordre minimal de x est 2.

C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \text{Ker } A(\sigma)$ donc $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-e.v. de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et il est stable par σ car σ et $A(\sigma)$ commutent.

L'application linéaire $\begin{cases} \mathcal{R}_A(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^p \\ x \mapsto (x_0, x_1, \dots, x_{p-1}) \end{cases}$ est clairement bijective, donc $\dim \mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \dim \mathbb{K}^p = p$.

C.2) $x \in \mathcal{R}_{X^p}(\mathbb{K})$ ssi $x_n = 0$ pour $n \geq p$ donc la famille $(e_k)_{0 \leq k \leq p-1}$, où $e_k = (\delta_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$, est une base de $\mathcal{R}_{X^p}(\mathbb{K})$.

C.3) a) L'application $\psi : \begin{cases} \mathbb{K}_{p-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ Q \mapsto (Q(n) \lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$ est linéaire, injective (car si $Q \in \text{Ker } \psi$ alors Q s'annule sur \mathbb{N} , donc est nul) et $\text{Im } \psi = E_A(\mathbb{K})$. Il en résulte que $E_A(\mathbb{K})$ est un sous-e.v. de dimension p de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

b) Notons $A_p = (X - \lambda)^p$. Selon C.1) et a), $\mathcal{R}_{A_p}(\mathbb{K})$ et $E_{A_p}(\mathbb{K})$ sont de dimension p ; il suffit donc de montrer que $E_{A_p}(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_{A_p}(\mathbb{K})$, ce que l'on va faire par récurrence sur p .

Pour $p = 1$ c'est évident : $\mathcal{R}_{X - \lambda}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites géométriques de raison λ , i.e. $E_{X - \lambda}(\mathbb{K})$.

Supposons l'inclusion démontrée au rang p et considérons $x \in E_{A_{p+1}}(\mathbb{K})$: $x_n = Q(n) \lambda^n$, avec $Q \in \mathbb{K}_p[X]$.

Posons $y = A_1(\sigma)(x) = (\sigma - \lambda \text{Id})(x)$. On a $A_{p+1}(\sigma)(x) = (A_p A_1)(\sigma)(x) = (A_p(\sigma) \circ A_1(\sigma))(x) = A_p(\sigma)(y)$.

D'autre part, $y_n = x_{n+1} - \lambda x_n = Q(n+1) \lambda^{n+1} - \lambda Q(n) \lambda^n = \lambda (Q(n+1) - Q(n)) \lambda^n$.

Le polynôme $\lambda (Q(X+1) - Q(X))$ est de degré inférieur ou égal à $p - 1$ donc, par hypothèse de récurrence, $y \in \mathcal{R}_{A_p}(\mathbb{K})$ et par conséquent $x \in \mathcal{R}_{A_{p+1}}(\mathbb{K})$.

D. Notons $\lambda_0 = 0$. Les polynômes $A_k = (X - \lambda_k)^{m_k}$, avec $0 \leq k \leq d$, sont deux à deux premiers entre eux donc, d'après le théorème des noyaux, $\text{Ker } A(\sigma) = \bigoplus_{k=0}^d \text{Ker } A_k(\sigma)$, c'est-à-dire $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus_{k=0}^d \mathcal{R}_{A_k}(\mathbb{K})$.

On a vu en C.2) que $\mathcal{R}_{A_0}(\sigma)$ est l'ensemble des suites nulles à partir du rang m_0 (y compris si $m_0 = 0$) et en C.3) que pour $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\mathcal{R}_{A_k}(\sigma)$ est l'ensemble des suites de la forme $n \mapsto Q(n) \lambda_k^n$ avec $Q \in \mathbb{K}_{m_k-1}[X]$. Il en résulte aussitôt que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites de la forme indiquée dans l'énoncé.

• Partie II

A.1) $x \in \mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ donc, d'après I.C.1), $\sigma^k(x) \in \mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soient $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{p-1} a_k \sigma^k(x) = 0$. Le polynôme $A = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ appartient à J_x , il est donc multiple de B , mais $\deg A < p = \deg B$, donc $A = 0$ et les a_k sont tous nuls.

$(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est donc une famille libre de cardinal p de l'e.v. $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ qui est de dimension p (cf I.C.1)) ; c'est par conséquent une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

Pour $n \leq p$, $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre en tant que sous-famille d'une famille libre, donc est de rang n .

Pour $n \geq p$, $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ est génératrice de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ en tant que sur-famille d'une famille génératrice, donc est de rang $\dim \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) = p$.

A.2) Une suite de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ est entièrement déterminée par ses p premiers termes, et *a fortiori* par ses n premiers termes (puisque $n \geq p$) ; φ_n est donc injective. D'autre part, φ_n est évidemment linéaire.

Selon A.1), la famille $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ est de rang p donc, par injectivité de φ_n , son image par φ_n est aussi de rang p . Or, $(\varphi_n(\sigma^k(x)))_{0 \leq k \leq n-1}$ est la famille des vecteurs-colonne de $H_n(x)$; par conséquent, $\text{rg}(H_n(x)) = p$.

B.1) On sait que m est supérieur ou égal à l'ordre minimal de x donc, d'après A.2), le rang de $H_m(x)$, c'est-à-dire p , est égal à l'ordre minimal de x .

Toujours d'après A.2), $\text{rg}(H_{p+1}(x)) = p$, donc par le théorème du rang, $\text{Ker}(H_{p+1}(x))$ est une droite vectorielle. Soit $b = (b_0, \dots, b_{p-1}, b_p)$ une base de cette droite vectorielle ; si b_p était nul, (b_0, \dots, b_{p-1}) serait un vecteur non nul de $\text{Ker}(H_p(x))$, ce qui est impossible puisque $H_p(x)$ est inversible ; donc $b_p \neq 0$ et, quitte à remplacer b par b/b_p , on peut supposer que $b_p = 1$.

B.2) L'égalité $H_{p+1}(x) \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{p-1} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ se traduit par $b_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \dots + b_{p-1} \begin{pmatrix} x_{p-1} \\ \vdots \\ x_{2p-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_p \\ \vdots \\ x_{2p} \end{pmatrix} = 0$, soit encore par $\sum_{k=0}^p b_k \varphi_{p+1}(\sigma^k(x)) = 0$ (où $b_p = 1$), et enfin par $\varphi_{p+1}\left(\sum_{k=0}^p b_k \sigma^k(x)\right) = 0$.

Comme φ_{p+1} est injective, $\sum_{k=0}^p b_k \sigma^k(x) = 0$; le polynôme minimal de x divise donc le polynôme $B = \sum_{k=0}^p b_k X^k$.

Ces deux polynômes étant unitaires de degré p , ils sont égaux.

C.1) On écrit une procédure MAPLE utilisant une table locale.

```
suite := proc(n)
  local x,k :
  x[0] := 1 : x[1] := 1 : x[2] := 1 : x[3] := 0 :
  for k from 4 to n
  do
    x[k] := x[k-1] - 2*x[k-3]
  end do :
  return([seq(x[k],k=0..n)])
end proc :
```

C.2) On calcule $x_4 = -2$ et $x_5 = x_6 = -4$, d'où $H_4(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

On constate ensuite que $\text{rg}(H_4(x)) = 3$. Comme x est par construction une SRL d'ordre 4, la question B.1) montre que l'ordre minimal de x est 3 et la question A.2) que $\text{rg}(H_n(x)) = 3$ pour tout $n \geq 3$.

Par ailleurs, on a directement $\text{rg}(H_1(x)) = \text{rg}(H_2(x)) = 1$.

C.3) On trouve $\text{Ker}(H_4(x)) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, d'après B.1), le polynôme minimal de x est $X^3 - 2X^2 + 2X$ et la relation de récurrence minimale de x est : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} - 2x_{n+2} + 2x_{n+1} = 0$.

C.4) $X^3 - 2X^2 + 2X = X(X - 1 - i)(X - 1 + i)$. On peut appliquer I.D en prenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on en déduit que, pour $n \geq 1$, x_n est de la forme $\alpha(1+i)^n + \beta(1-i)^n$, où α et β sont deux constantes complexes.

Avec $x_1 = x_2 = 1$ on trouve $\alpha = \frac{1-i}{4}$ et $\beta = \frac{1+i}{4}$ donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = \frac{(1-i)(1+i)^n + (1+i)(1-i)^n}{4} = \frac{(1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1}}{2} = \operatorname{Re}((1+i)^{n-1}) = (\sqrt{2})^{n-1} \cos \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

C.5) Changer x_0 ne modifie pas les x_n pour $n \geq 1$. La nouvelle suite x appartient donc toujours à $\mathcal{R}_{X^3 - 2X^2 + 2X}(\mathbb{K})$.

On a maintenant $H_3(x) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et on constate que $\operatorname{rg}(H_3(x)) = 2$.

On en déduit que l'ordre minimal de x est 2 et que $\operatorname{rg}(H_n(x)) = 2$ pour tout $n \geq 2$. Evidemment, $\operatorname{rg}(H_1(x)) = 1$.

Ensuite, on trouve $\operatorname{Ker}(H_3(x)) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc le polynôme minimal de x est $X^2 - 2X + 2$ et sa relation de récurrence minimale est : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$.

• Partie III

A.1) Une matrice de Hankel est symétrique réelle, donc (ortho-)diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; en particulier, elle possède n valeurs propres réelles comptées avec leur ordre de multiplicité.

A.2) Par l'absurde, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^{2n-1}$ tel que $\operatorname{Spo}(H(a)) = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$.

Comme $H(a)$ est diagonalisable, on aurait $H(a) = \lambda I_n$, d'où $a_0 = \lambda$ et $a_k = 0$ pour $1 \leq k \leq n-1$ d'après la première colonne et $a_2 = \lambda$ d'après la deuxième colonne ; c'est impossible puisque $n \geq 3$ et $\lambda \neq 0$.

$$\text{B.1)} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \operatorname{tr}(M) = \sum_{k=1}^n m_{k,k} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 &= \operatorname{tr}(M^2) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{i,j} m_{j,i} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i+j-2}^2 \right) = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} a_{i+j}^2. \\ &= \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n-1 \\ i+j=k}} a_k^2 \right) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1) a_k^2. \end{aligned}$$

(En effet, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ (resp. $k \in \llbracket n, 2n-2 \rrbracket$), il existe $k+1$ (resp. $2n-k-1$) couples $(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$ tels que $i+j=k$.)

$$\text{B.2)} \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i = \sum_{i=1}^n a_{2i-2} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ d'après B.1).}$$

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^p (2i-1) a_{2i-2}^2 + \sum_{i=p+1}^n (2n-2i+1) a_{2i-2}^2 = \sum_{i=0}^{p-1} (2i+1) a_{2i}^2 + \sum_{i=p}^{n-1} (2n-2i-1) a_{2i}^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{2p-2} (k+1) a_k^2 + \sum_{k=2p}^{2n-2} (2n-k-1) a_k^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1) a_k^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \text{ d'après B.1).} \end{aligned}$$

(La première majoration est grossière (on a ajouté les termes d'indice impair, qui sont positifs) et la seconde est justifiée par les inégalités $2p-2 \leq n-1$ et $2p \geq n$.)

$$\begin{aligned} \text{B.3)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2\lambda_i \lambda_j) = \frac{1}{2} \left(n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + n \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^n \lambda_j \right) \\ &= n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 = n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \langle v, w \rangle^2 \text{ d'après l'égalité du B.2).} \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité du B.2) donnent alors :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geq n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \|v\|^2 \|w\|^2 \geq n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \|w\|^2 = K_n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

B.4) Pour $n = 3$, $\|w\|^2 = 1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{3}$ et l'inégalité (III.1) devient $(\lambda_2 - \lambda_1)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2 + (\lambda_3 - \lambda_2)^2 \geq \frac{2}{3}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$, ce qui se réécrit $2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \geq 3(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3)$ après développement et regroupement.

C.1) B est diagonalisable et $\text{rg } B = 3$ de façon évidente donc, d'après le théorème du rang, 0 est valeur propre de B d'ordre $n - 3$ (si $n \geq 4$).

D'autre part, en notant $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $BE_p = -2E_p$, $B(E_1 + E_{2p-1}) = E_1 + E_{2p-1}$ et $B(E_1 - E_{2p-1}) = -(E_1 - E_{2p-1})$ donc le spectre ordonné de B est $(1, 0, \dots, 0, -1, -2)$.

C.2) Les seules colonnes de MB éventuellement non nulles sont les colonnes $1, p$ et $2p - 1$ et les termes diagonaux correspondants sont $a_{2p-2}, -2a_{2p-2}$ et a_{2p-2} , donc $\text{tr}(MB) = 0$.

L'application de (III.2) à M et B donne alors $-2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_n \leq 0 \leq \lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n$.

D.1) On remarque que $a - c$ est valeur propre de M associée à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela va permettre de factoriser χ_M .

$$\chi_M = X^3 - (2a+c)X^2 + (a^2 - 2b^2 - c^2 + 2ac)X + c^3 + 2ab^2 - a^2c - 2b^2c = (X - a + c)(X^2 - (a + 2c)X - 2b^2 + c^2 + ac).$$

$$\text{On en déduit les valeurs propres de } M : a - c, \frac{a + 2c + \sqrt{a^2 + 8b^2}}{2} \text{ et } \frac{a + 2c - \sqrt{a^2 + 8b^2}}{2}.$$

D.2) Cherchons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\frac{a + 2c + \sqrt{a^2 + 8b^2}}{2} = \lambda_1$, $a - c = \lambda_2$ et $\frac{a + 2c - \sqrt{a^2 + 8b^2}}{2} = \lambda_3$.

$$\text{Cela équivaut à } \begin{cases} a + 2c = \lambda_1 + \lambda_3 \\ a - c = \lambda_2 \\ \sqrt{a^2 + 8b^2} = \lambda_1 - \lambda_3 \end{cases} \text{ ou encore à } \begin{cases} a = \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3}{3} \\ c = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3}{3} \\ b^2 = \frac{9(\lambda_1 - \lambda_3)^2 - (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)^2}{72} \end{cases}.$$

$$\text{De plus, } 9(\lambda_1 - \lambda_3)^2 - (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)^2 = (3(\lambda_1 - \lambda_3) + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3))(3(\lambda_1 - \lambda_3) - (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)) = 4(2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3) \geq 0, \text{ d'après les hypothèses.}$$

Le système étudié possède donc une unique solution telle que $b \geq 0$.

D.3) On déduit du D.2) que lorsque $n = 3$, (III.3) est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une matrice de Hankel de spectre ordonné $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Pour montrer que la condition (III.1) n'est pas suffisante, il suffit de prouver l'existence d'un réel $\lambda \geq 1$ tel que $(\lambda, 1, 1)$ vérifie (III.1) mais pas (III.3). Cela conduit au système $\begin{cases} 2\lambda^2 - 6\lambda + 1 \geq 0 \\ 1 \leq \lambda < 3. \end{cases}$

Comme $2\lambda^2 - 6\lambda + 1$ vaut 1 pour $\lambda = 3$, tout réel λ strictement inférieur à 3 et assez proche de 3 est solution du système précédent.