A 2009 MATH. I MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2009

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE ParisTech, ENSTIM, TELECOM SudParis (ex TELECOM INT), TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

On note E l'ensemble des fonctions f continues, définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives ou nulles, et vérifiant l'équation

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$$

Lorsqu'elle existe, la *fonction caractéristique* de $f \in E$ est la fonction $\phi_f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par la formule

$$\phi_f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx.$$

Lorsque pour un entier $k \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto |x|^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on appelle moment d'ordre k de f la quantité

$$a_k(f) = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)dx.$$

Si, pour tout entier $k \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto |x|^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on dit que f admet des moments de tous ordres.

On admettra que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\big(\lambda x - \frac{x^2}{2}\big)\, dx = \sqrt{2\pi}\, \exp\big(\frac{\lambda^2}{2}\big).$$

A. Questions préliminaires.

Les résultats de ces questions, indépendantes les unes des autres, pourront être utilisés dans la suite du problème.

1) Soit $f \in E$. On suppose, dans cette question, que f admet des moments de tous ordres.

Montrer l'existence de ϕ_f et de ses dérivées successives que l'on exprimera à l'aide de f.

2) Montrer que pour tout réel x et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\left| e^{ix} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!} \right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}.$$

3) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que la fonction $h_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h_{a,b}(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} & si \quad t \neq 0 \\ b - a & si \quad t = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que pour tout réel t, $|h_{a,b}(t)| \leqslant b-a$.

5) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 0$, $e^k \geqslant \dfrac{k^k}{k!}$.

B. La fonction ϕ_f caractérise f

On considère la fonction R définie pour tout $(\theta, T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par la formule

$$R(\theta, T) = \int_{-T}^{T} \frac{\sin(\theta t)}{t} dt$$

et la fonction S définie pour tout $T \in \mathbb{R}$ par la formule

$$S(T) = \int_0^T \frac{\sin x}{x} dx.$$

On admet que $\lim_{T\to+\infty} S(T) = \dfrac{\pi}{2}$.

6) Exprimer $R(\theta, T)$ à l'aide de S.

7) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de $R(x,T) - R(y,T)$ quand $T \to +\infty$ (on discutera de cette limite en fonction des signes de x et y).

8) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que

On admet que l'on peut intervertir l'intégrale sur [-T, T] et l'intégrale sur $\mathbb{R}$ définissant ϕ_f pour appliquer le TCVD.

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

9) En déduire qu'étant donné deux fonctions f et g de E, si $\phi_f = \phi_g$, alors $f = g$.

C. La suite $a_k(f)$ ne caractérise pas toujours f

On définit la fonction f_0 par

$$f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\exp(-\frac{(\ln x)^2}{2})}{x} & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x \leqslant 0. \end{cases}$$

10) Montrer que $f_0 \in E$.

11) Montrer que f_0 admet des moments de tous ordres et calculer $a_k(f_0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On introduit, pour $a \in [-1, 1]$, la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$f_a(x) = f_0(x) \cdot (1 + a \sin(2\pi \ln x)).$$

12) Montrer que $f_a \in E$, et que $a_k(f_0) = a_k(f_a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

D. Une condition sur la suite $a_k(f)$

Dans cette partie, f est une fonction de E qui admet des moments de tous ordres, et vérifie en outre la condition (**U**) suivante :

(**U**) Il existe $M > 0$ tel que pour tout entier $k > 0$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leqslant M.$

On pose $b_k(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|^k f(x)\,dx$ pour tout entier $k > 0$.

13) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, on a l'inégalité

$$\left(b_{2k+1}(f)\right)^2 \leqslant a_{2k}(f) \cdot a_{2k+2}(f).$$

14) En déduire que la suite de terme général $\dfrac{b_k(f)^{\frac{1}{k}}}{k}$ est majorée par $2M$.

15) Montrer que pour tous x et h réels, et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\left|\phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!}\phi_f^{(m)}(x)\right| \leqslant \frac{|h|^n}{n!} b_n(f).$$

16) Montrer que, pour un certain $A > 0$ que l'on exprimera en fonction de M, on a l'égalité

$$\phi_f(x+h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!}\phi_f^{(m)}(x)$$

pour tout réel x et pour tout h tel que $|h| < A$.

17) En déduire que si ℓ est un entier > 0 et g une fonction de E admettant des moments de tous ordres tels que $a_k(f) = a_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\phi_f(x) = \phi_g(x)$$

pour tout $x \in [-\frac{\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}]$ (on pourra procéder par récurrence).

18) Conclure.

E. Application

19) Résoudre en $f \in E$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a_{2k}(f) = (2k-1)\,a_{2k-2}(f) \\ a_{2k-1}(f) = 0 \end{cases}$$

pour tout entier $k \geqslant 1$. (On pourra utiliser la fonction caractéristique de f.)

FIN DU PROBLÈME