Programme de colle – MPI

Reprise du chapitre sur la convergence dominée et l'intégration terme à terme pour exercices.

1. Intégrales à paramètres

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Soit A une partie ~~d'un espace normé de dimension finie~~ [une partie de $\mathbb{R}$, pour le moment], I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : ★ pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est continue ; ★ pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est continue par morceaux ; ★ il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x,\cdot)\rvert\leqslant\varphi$. Alors $x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : ★ pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; ★ pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I ; ★ pour tout $x\in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur I ; ★ il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\left\lvert\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right\rvert\leqslant\varphi$. Alors $g: x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $\forall x\in A,\quad g'(x)=\displaystyle\int_I\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot)$ pour $0\leqslant j\leqslant k-1$.	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique.

2. Séries entières

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe. Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert<\lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Rayon de convergence d'une série entière, défini comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$, de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	
Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\lvert z\rvert<R$, et elle diverge grossièrement si $\lvert z\rvert>R$.
Si $a_n=O(b_n)$ et donc en particulier si $a_n=o(b_n)$, $R_a\geqslant R_b$. Si $a_n\sim b_n$, $R_a=R_b$.	Rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon. Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	La limite du rapport $\dfrac{\lvert a_{n+1}\rvert}{\lvert a_n\rvert}$ peut être utilisée directement.
b) Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe	
Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence. Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.	
d) Développements usuels	
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$. Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur $\{z\in\mathbb{C},\ \lvert z\rvert<1\}$.	
Développements usuels dans le domaine réel.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x\mapsto\ln(1+x)$ et $x\mapsto(1+x)^\alpha$.

Semaine prochaine Séries entières (suite), révisions de probabilités.

3. Questions de cours

(i) * Démonstration des théorèmes de continuité et de classe $\mathscr{C}^1$ d'une intégrale à paramètre.

(ii) * $\Gamma: x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$, expression des dérivées, $\ln$-convexité, limites en 0^+ et $+\infty$, graphe. (On admet ici que $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, démontré dans **CCINP 29**).

(iii) **Exercices CCINP 15, 20, 21, 25, 26, 27, 29, 30, 50**

4. Exercices CCINP

- **CCINP 15**

  Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

  1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
     Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
  2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
  3. La série de fonctions $\sum\dfrac{n^2}{n!}z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R\in\mathbb{R}_+^*$?

- **CCINP 20** :

  1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
  2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

     (a) $\sum\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}z^{2n+1}$. (b) $\sum n^{(-1)^n}z^n$. (c) $\sum\cos(n)z^n$.

- **CCINP 21** :
  1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
  2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
  3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$?

- **CCINP 25** :
  1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t\longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
  2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, pose $u_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}$. Calculer la limite de (u_n).

- **CCINP 26** : Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.
  1. Justifier que I_n est bien définie.
  2. a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
     b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
  3. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

- **CCINP 27** : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
  1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
  2. Soit $a\in\,]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
  3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
  4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- **CCINP 29** : On pose : $\forall x\in]0,+\infty[,\ \forall t\in]0,+\infty[,\ f(x,t)=\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.
  1. Démontrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

     On pose alors : $\forall x\in]0,+\infty[,\ \Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
  2. Pour tout $x\in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
  3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

- **CCINP 30** :
  1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
  2. Démontrer que la fonction $f:x\longmapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
  3. a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
     b) Résoudre (E).

- **CCINP 50** : On considère la fonction $F:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$.
  1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
  2. Prouver que $x\longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
  3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.