Programme de colle – MPI

1. Régularité des suites et séries de fonctions

Reprise du début du chapitre auquel on ajoute l'intégration sur un segment et la classe $\mathscr{C}^k$.

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in I$ soit $U_n(x)=\int_a^x u_n,\quad U(x)=\int_a^x u.$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a,b]$, alors : $\int_a^b u_n \to \int_a^b u$.
Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u'=v$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (u_n') sur des intervalles adaptés à la situation.
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0\leqslant j\leqslant k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(u_n^{(k)})$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.
Séries de fonctions	
Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.	

2. Intégrales généralisées

Extrait du programme officiel :

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des nombres réels ou des nombres complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x\mapsto\int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente en $+\infty$. Dérivation de $x\mapsto\int_x^{+\infty} f$ si f est continue. Écriture $\int_a^{+\infty} f=+\infty$ en cas de divergence.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x\mapsto\int_a^x f$ est majorée. Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0\leqslant f\leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$.	
Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et si $\int_a^{+\infty}\lvert f\rvert$ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ». Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a,+\infty[$. Un calcul montrant que $\int_I \lvert f\rvert<+\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.
Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.	Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$: ★ si $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; ★ si $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.	Le résultat s'applique en particulier si $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}o(g(x))$.
Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente en b, en a. Écriture $\int_a^b f=+\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente. Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles. Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t=[fg]_a^b-\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi\ :\ ]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.
Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Une fonction est dite intégrable sur l'intervalle I si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,b[$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ». Fonction intégrable en b, en a.
Espace $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.	Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\int_I f$.
Inégalité triangulaire. Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f=0$, alors f est identiquement nulle. Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Si $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}\,\mathrm{d}x$.	La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.
Intégration des relations de comparaison	
Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est réelle de signe constant.

Pour les intégrations par parties sur des intervalles quelconques : on revient systématiquement sur un segment. Pas de convergence dominée au programme cette semaine.

3. Passage à la limite sous l'intégrale

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Convergence dominée	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors : $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$	La démonstration est hors programme.
Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.	
Intégration terme à terme	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I, alors, dans $[0,+\infty]$, $$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty.$$
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que $$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I \lvert f_n(t)\rvert\,\mathrm{d}t < +\infty,$$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et $$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. On met en évidence le parallélisme de cet énoncé et du précédent avec ceux issus de la théorie des familles sommables. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

Bien sûr, on connaît aussi les théorèmes d'intégration terme à terme dans le cas où l'intervalle est un segment et qu'il y a convergence uniforme.

Exemple de limite par découpage de l'intégrale.

Semaine prochaine : Intégrales à paramètres, séries entières.

4. Questions de cours

Les preuves marquées d'un astérisque ✻ ne peuvent être posées qu'aux membres des trinômes 6 et 7. Les mêmes ne seront éventuellement interrogés que sur les exercices CCINP 14, 16, 27, 49. Les autres questions sont posables à tous.

(i) Énoncés seuls précis choisis par le colleur parmi les théorèmes d'intégration sur un segment, primitive, classe $\mathscr{C}^k$ (avec k éventuellement infini) d'une suite de fonction ou d'une série de fonctions, le théorème de convergence dominée discret ou continu, les théorèmes d'interversion série-intégrale et les trois formules de Taylor (avec leurs hypothèses, bien sûr).

(ii) **Fonction ζ de Riemann** : classe $\mathscr{C}^\infty$, expression des dérivées, variations, convexité, limite aux bornes et graphe.

(iii) **Exercices CCINP 10, 14, 16, 25, 26, 27, 28, 49.**

(iv) ✻ Exemple de fonction intégrable au voisinage de $+\infty$, ne tendant pas vers 0, voire non bornée (on se contente d'une description graphique très précise).

(v) ✻ Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

(vi) ✻ **Intégrale de Dirichlet** : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\mathrm{d}t$ mais $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

(vii) ✻ **Intégrales de Bertrand** sur $[2,+\infty[$.

5. Exercices CCINP

- **CCINP 10** : On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

  1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
  2. Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

- **CCINP 14** :

  1. Soit a et b deux réels donnés avec $a<b$. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.

     Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
  2. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$.

     On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.

     Prouver, **en utilisant 1.**, que $\displaystyle\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
  3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

- **CCINP 16** : On considère la série de fonctions de terme général f_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad f_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right].$$

1. Démontrer que S est définie sur $[0,1]$.
2. On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
   En utilisant $S(1)$ montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
   En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Démontrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et calculer $S'(1)$.

- **CCINP 25** :

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}$. Calculer la limite de (u_n).

- **CCINP 26** : Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. La série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

- **CCINP 27** : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2. Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- **CCINP 28** : *N.B. : les deux questions sont indépendantes.*

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

- **CCINP 49** : Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,+\infty[,\ f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

   On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.
   En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|f_n(t)\right|\mathrm{d}t$.
   (b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.