Exercice 1 : Addition sur une parabole

1. La droite passant par A et B coupe Δ en un point de coordonnées $(x;-1)$ tel que $(x;-1)-\left(x_A;x_A^2\right)$ soit colinéaire à $\left(x_B;x_B^2\right)-\left(x_A;x_A^2\right)=(x_B-x_A)(1;x_A+x_B)$. Comme $x_B\neq x_A$ (sinon on aurait $y_B=y_A$), on en déduit que $(x-x_A;-1-x_A^2)$ est proportionnel à $(1;x_A+x_B)$, c'est-à-dire $x-x_A=\dfrac{-1-x_A^2}{x_A+x_B}$. Après simplification on obtient
$$x_{A\oplus B}=\frac{x_Ax_B-1}{x_A+x_B}$$
2. On a
$$x_{(A\oplus B)\oplus C}=\frac{x_{A\oplus B}x_C-1}{x_{A\oplus B}+x_C}=\frac{x_Ax_Bx_C-(x_A+x_B+x_C)}{x_Ax_B+x_Bx_C+x_Cx_A-1}.$$
Comme l'expression est invariante par permutation circulaire, elle vaut $x_{(B\oplus C)\oplus A}$, et comme l'opération $\oplus$ est symétrique d'après la question 1, elle vaut $x_{A\oplus(B\oplus C)}$.
3. (a) La tangente en A a pour équation $y=y_A+2x_A(x-x_A)=2x_Ax-x_A^2$. Elle coupe Δ au point $(x_{A\oplus A};-1)$ tel que $-1=2x_Ax_{A\oplus A}-x_A^2$, ce qui se simplifie en
$$x_{A\oplus A}=\frac{x_A^2-1}{2x_A}.$$
   (b) Le calcul est le même qu'à la question 2 , en remplaçant x_B par x_A.
4. (a) Montrons par récurrence que $x_n\neq 0$ pour tout n. L'assertion est vraie pour $n=0$ car $x_0=3$. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $x_n\neq 0$, montrons $x_{n+1}\neq 0$. Comme $x_n\neq 0$ on a $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2-1}{2x_n}$. Supposons par l'absurde $x_{n+1}=0$. Alors $x_n^2=1$. Nécessairement $n\geqslant 1$ et, d'après la relation de récurrence, $x_{n-1}\neq 0$ et $x_n=\dfrac{x_{n-1}^2-1}{2x_{n-1}}$. On en déduit que $x_{n-1}^2-1=\pm 2x_{n-1}$, puis $(x_{n-1}\pm 1)^2=2$. Or, une récurrence immédiate montre que $x_k\in\mathbb{Q}$ pour tout k, d'où une contradiction. On a ainsi montré que $x_n\neq 0$ pour tout n.
   (b) Si la suite (x_n) convergeait vers un nombre $\ell\in\mathbb{R}$, en passant à la limite l'égalité $x_{n+1}(2x_n)=x_n^2-1$ il viendrait $2\ell^2=\ell^2-1$, donc $\ell^2=-1$, ce qui est impossible.
5. Les points $E(c)$ sont nécessairement de la forme $\left(x;x^2\right)$ avec $x=\dfrac{a}{b}$, $b\in[\![1;e^c]\!]$ et $a\in[\![-e^c;e^c]\!]$, donc $E(c)$ est de cardinal $\leqslant e^c(2e^c+1)$.
6. Si un nombre premier p divise à la fois a^2-b^2 et ab, alors p divise a ou b. S'il divise a alors $p\mid a^2$ donc $p\mid a^2-\left(a^2-b^2\right)=b^2$, d'où $p\mid b$, ce qui contredit le fait que a et b sont premiers entre eux. De même on montre que $p|b\Longrightarrow p|a$.
7. Soient $a\in\mathbb{Z}^*$ et $b\in\mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $x_P=\dfrac{a}{b}$, alors
$$x_{P\oplus P}=\frac{a^2-b^2}{2ab}.$$
Si $a^2=b^2$ alors, comme a et b sont premiers entre eux, on a $x_P=\pm 1$ et $x_{P\oplus P}=0$ donc $h(P\oplus P)=h(P)=0$. Supposons dorénavant $a^2\neq b^2$ et soit $c=H(x_P)=\max(|a|,|b|)$. Si a^2-b^2 est impair alors il est à la fois premier avec ab et avec 2 , donc la dfraction $\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$ est irréductible.
Par conséquent $H(x_{P\oplus P})=\max\left\{\left|a^2-b^2\right|,2|ab|\right\}$. Alors $H(x_{P\oplus P})\leqslant\max\left\{c^2,2c^2\right\}=2c^2$.
D'autre part, si $|a|,|b|\geqslant c/2$ alors $H(x_{P\oplus P})\geqslant 2|ab|\geqslant c^2$, et si $|a|<c/2$ ou $|b|<c/2$ alors
$$H(x_{P\oplus P})\geqslant\left|a^2-b^2\right|\geqslant c^2-(c/2)^2=3c^2/4.$$
Ainsi, lorsque a^2-b^2 est impair on a dans tous les cas $H(x_P\oplus x_P)/H(x_P)^2\in[3/4;2]$.

Si a^2-b^2 est pair alors la fraction $\dfrac{\frac{a^2-b^2}{2}}{ab}$ est irréductible donc

$$H(x_{P\oplus P}) = \max\left\{\left|a^2-b^2\right|/2, |ab|\right\}$$

D'après le même calcul que plus haut on a $H(x_P \oplus x_P)/H(x_P)^2 \in [3/8;1]$. Par conséquent on a pour tout P tel que $x_P \in \mathbb{Q}^*$:

$$H(x_P \oplus x_P)/H(x_P)^2 \in [3/8;2].$$

En passant au logarithme, il vient

$$m + h(P\oplus P) \leqslant 2h(P) \leqslant h(P\oplus P) + M$$

avec $m = \ln(1/2)$ et $M = \ln(8/3)$.

8. (a) La suite $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1}-u_k|$ est croissante et majorée, donc converge.
   (b) Comme $-|u_{n+1}-u_n| \leqslant u_{n+1}-u_n \leqslant |u_{n+1}-u_n|$, en additionnant $|u_{n+1}-u_n|$ il vient

   $$0 \leqslant u_{n+1}-u_n+|u_{n+1}-u_n| \leqslant 2|u_{n+1}-u_n|.$$

   (c) Soit $w_n = u_n + v_n$. Les inégalités précédentes indiquent que $0 \leqslant w_{n+1}-w_n \leqslant 2(v_{n+1}- v_n)$ donc la suite (w_n) est croissante. De plus, en additionnant ces inégalités entre 0 et $n-1$, il vient $w_n - w_0 \leqslant 2v_n$, donc la suite (w_n) est majorée. Par conséquent elle converge.
   (d) Comme $u_n = (u_n+v_n)-v_n$, la suite (u_n) converge.
9. D'après la question 7, on a $m + h(A_{n+1}) \leqslant 2h(A_n) \leqslant h(A_{n+1}) + M$ donc, en divisant par 2^{n+1}, on voit que la suite (t_n) définie par $t_n = \dfrac{h(A_n)}{2^n}$ vérifie

   $$\frac{m}{2^{n+1}} + t_{n+1} \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} + \frac{M}{2^{n+1}}$$

   On en déduit que $|t_{n+1}-t_n| \leqslant \dfrac{m'}{2^{n+1}}$ où $m' = \max(|M|,|m|)$, et donc

   $$\sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1}-t_k| \leqslant m' \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-(k+1)} \leqslant m'$$

   D'après la question 8, la suite (t_n) converge.

Exercice 2 : Suite positive et suite bornée

1. (a) Si $\alpha \geqslant 1$ alors $u_2 = 1-\alpha \leqslant 0$ donc aucun réel de l'intervalle $[\,1;+\infty\,[$ ne vérifie la propriété $\mathscr{P}$.
   (b) Comme $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}^2$, une récurrence double immédiate montre que $u_n > 0$ pour tout n. Par conséquent, les réels appartenant à $]-\infty;0]$ vérifient tous la propriété $\mathscr{P}$.
2. (a) Montrons la propriété $0 < u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ par récurrence sur n.
   Elle est satisfaite pour $n=0$. Supposons-la vraie au rang $n-1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, alors $u_{n+1} > 0$ puisque α vérifie la propriété $\mathscr{P}$, et $u_{n+1} = u_n^2 - \alpha u_{n-1}^4 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n \leqslant 1$ par hypothèse de récurrence, donc la propriété est vraie au rang n.
   (b) La suite (u_n) étant décroissante et minorée (par 0), elle converge. Soit $\ell \in [0,1]$ sa limite. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1}^2 - \alpha u_n^4$, il vient $\ell = \ell^2 - \alpha\ell^4$. Si $\ell > 0$ alors on obtient $1 = \ell - \alpha\ell^3 < \ell$ ce qui est contradictoire. Donc (u_n) tend vers 0 .
   (c) $x_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}^2 - \alpha u_n^4}{u_{n+1}^2} = 1 - \dfrac{\alpha}{x_n^2}$.
   (d) On a $x_0 = 1$ et $x_1 = 1-\alpha \leqslant x_0$. La fonction $f(x) = 1 - \dfrac{\alpha}{x^2}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or pour tout $n, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ donc une récurrence immédiate montre que $x_{n+1} \leqslant x_n$ pour tout n. La suite (x_n) est donc décroissante et minorée (par 0), donc convergente. L'égalité $x_{n+1}x_n^2 = x_n^2 - \alpha$ entraîne $x_\infty^3 = x_\infty^2 - \alpha$, ce qui équivaut à $x_\infty^2(1-x_\infty) = \alpha$.

(e) Étudions la fonction $g(x)=x^2(1-x)$ sur $[0;1]$. Comme $g'(x)=x(2-3x)$, la fonction g est croissante sur $\left[0;\frac{2}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{3};1\right]$, par conséquent

$$\alpha = g(x_\infty) \leqslant g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}.$$

3. On a vu que les réels vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ appartiennent à $\left]-\infty;\frac{4}{27}\right]$ et que les réels appartenant à $]-\infty;0\,]$ vérifient tous la propriété $\mathscr{P}$. Réciproquement, soit $\alpha \in \left]0;\frac{4}{27}\right]$. Comme g est strictement décroissante et continue sur $\left[\frac{2}{3};1\right]$, il existe un et un seul réel $x_\infty \in \left[\frac{2}{3};1\right]$ tel que $g(x_\infty)=\alpha$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $x\in[x_\infty;1]$ on a $x_\infty = f(x_\infty) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \leqslant 1$. Par conséquent, une récurrence immédiate montre que $x_n \in [x_\infty;1]$ pour tout n. Comme $x_{n-1} = \dfrac{u_n}{u_{n-1}^2}$ pour tout $n \geqslant 1$, on en déduit que $u_n > 0$. Conclusion : l'ensemble des réels vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ est $\left]-\infty;\frac{4}{27}\right]$.

4. (a) Supposons $\alpha < 0$, alors pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_{n+2} = u_{n+1}^2 - \alpha u_n^4 > u_{n+1}^2$. Par récurrence immédiate on en déduit que $u_n \geqslant 1$ pour tout n. On a alors $u_{n+1}^2 \geqslant u_{n+1}$, ce qui entraîne que (u_n) est croissante. Si elle était bornée, sa limite ℓ vérifierait $\ell \geqslant u_2 > 1$, et aussi $\ell = \ell^2 - \alpha\ell^4 > \ell^2 > \ell$, ce qui est contradictoire. Donc aucun réel de l'intervalle $]-\infty;0\,[$ ne vérifie la propriété $\mathscr{B}$.

   (b) Soit $\alpha\in[0;1]$. Soit n tel que $|u_n| \leqslant 1$ et $|u_{n+1}| \leqslant 1$. Alors $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}^2 \leqslant 1$, et $u_{n+2} \geqslant -\alpha u_n^4 \geqslant -u_n^4 \geqslant -1$. Par récurrence on en déduit que $|u_n| \leqslant 1$ pour tout n. Conclusion : tout réel de l'intervalle $[0;1]$ vérifie la propriété $\mathscr{B}$.

5. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1, v_n = |u_{n-1}|$ ou $v_n = |u_n|$. La propriété est vraie pour $n=1$. Supposons-la vraie au rang n. Si $v_n = |u_n|$ alors $v_{n+1} = \max(|u_{n+1}|, v_n)$ est égal à $|u_n|$ ou $|u_{n+1}|$. Si $v_n = |u_{n-1}|$ alors $|u_n| \leqslant |u_{n-1}|$ donc

$$|u_{n+1}| = \left|u_n^2 - \alpha u_{n-1}^4\right| \geqslant \alpha u_{n-1}^4 - u_n^2 \geqslant 2u_{n-1}^4 - u_{n-1}^2.$$

   Or $|u_{n-1}| = v_n \geqslant |u_0| = 1$ donc $u_{n-1}^4 \geqslant u_{n-1}^2$, ce qui implique $|u_{n+1}| \geqslant u_{n-1}^2 \geqslant |u_{n-1}| = v_n$. Par conséquent, $v_{n+1} = \max(v_n, |u_{n+1}|) = |u_{n+1}|$, ce qui montre la propriété au rang $n+1$. Par récurrence, elle est vraie pour tout n.

   (b) Supposons par l'absurde que α vérifie la propriété $\mathscr{B}$. La suite (v_n) étant croissante et bornée, elle converge vers une limite ℓ. On a $\ell \geqslant 1$ puisque $v_0 = 1$. Comme $\dfrac{\ell}{\alpha-1} < \ell$, il existe N tel que $v_N > \dfrac{\ell}{\alpha-1}$. Soit $n \geqslant N$. Si $v_n = |u_{n-1}|$ alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} = |u_{n+1}| &= \left|u_n^2 - \alpha u_{n-1}^4\right| \\ &\geqslant \alpha u_{n-1}^4 - u_n^2 \geqslant \alpha u_{n-1}^4 - u_{n-1}^2 = \left(\alpha v_n^2 - 1\right) v_n^2 \geqslant (\alpha-1)v_n > \ell, \end{aligned}$$

   ce qui est impossible. Par conséquent, pour tout $n \geqslant N$ on a $v_n = |u_n|$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $|u_{n+2}| = \left|u_{n+1}^2 - \alpha u_n^4\right|$, il vient

$$\ell = \left|\ell^2 - \alpha\ell^4\right| = \left(\alpha\ell^2 - 1\right)\ell^2 \geqslant (\alpha-1)\ell > \ell$$

   ce qui est contradictoire. Par conséquent α ne vérifie pas la propriété $\mathscr{B}$.

6. (a) On a directement

$$P\left(\frac{11-2\alpha}{7}\right) = \frac{-8\alpha^4 + 132\alpha^3 - 726\alpha^2 + 1429\alpha - 882}{343} = \frac{(2-\alpha)Q(\alpha)}{7^3}.$$

   (b) Pour tout $x \geqslant 1, P'(x) = 3\alpha x^2 - 1 \geqslant 3\alpha - 1 \geqslant 3 - 1 > 0$ donc P est strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Par ailleurs, les racines de Q' sont $\dfrac{13}{2}$ et $\dfrac{19}{6}$. Comme elles sont strictement plus grandes que 2, et comme le coefficient dominant de Q est strictement positif, on a $Q'(x) > 0$ pour tout $x \leqslant 2$ donc la fonction Q est strictement croissante sur $[\,1;2\,]$.

   (c) On a $Q(9/7) = 6651/343 > 0$ donc $Q(\alpha) > 0$.

(d) Comme $u_2 = 1-\alpha$, on a

$$-u_3 - \frac{11-2\alpha}{7} = -(1-\alpha)^2 + \alpha - \frac{11-2\alpha}{7} = (2-\alpha)\left(\alpha - \frac{9}{7}\right) \geqslant 0$$

donc $-u_3 \geqslant (11-2\alpha)/7$.

(e) Comme $Q(\alpha) > 0$, d'après la question a) on a $P((11-2\alpha)/7) > 0$. D' après la question d) et la croissance de P, on en déduit $P(-u_3) > 0$. Comme dans la question 5, définissons $v_n = \max\{|u_0|, \dots, |u_n|\}$. Montrons qu'on a encore pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_n = |u_n| \text{ ou } v_n = |u_{n-1}| \quad (P_n)$$

Les assertions (P_1) et (P_2) sont vraies car $u_0 = u_1$. Montrons (P_3). On a $-u_3 \geqslant (11-2\alpha)/7 \geqslant 1$ et $|u_2| = \alpha - 1 < 1$ donc $v_3 = -u_3 = |u_3|$. Soit $n \geqslant 3$ telle que (P_n) soit vraie, et montrons (P_{n+1}). Comme $v_{n+1} = \max(v_n, |u_{n+1}|)$, c'est évident si $v_n = |u_n|$. Supposons $v_n = |u_{n-1}|$. Alors

$$|u_{n+1}| \geqslant \alpha u_{n-1}^4 - u_n^2 \geqslant \alpha v_n^4 - v_n^2 = v_n(1 + P(v_n)).$$

Or $v_n \geqslant -u_3$ donc $P(v_n) \geqslant P(-u_3) > 0$, par conséquent $|u_{n+1}| \geqslant v_n$.
On en déduit que $v_{n+1} = \max(v_n, |u_{n+1}|) = |u_{n+1}|$.
On a ainsi montré par récurrence que (P_n) est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
Supposons maintenant par l'absurde que α vérifie la propriété $\mathscr{B}$. Alors la suite (v_n) est croissante majorée. Soit ℓ sa limite. Pour tout $n \geqslant 0$ on a $\alpha u_n^4 - u_{n+1}^2 = -u_{n+2} \leqslant \ell$ donc $\alpha u_n^4 \leqslant u_{n+1}^2 + \ell \leqslant \ell^2 + \ell$. On a aussi $\alpha u_{n-1}^4 \leqslant \ell^2 + \ell$ pour tout $n \geqslant 1$ donc

$$\alpha v_n^4 = \max\left(\alpha u_n^4, \alpha u_{n-1}^4\right) \leqslant \ell^2 + \ell.$$

En passant à la limite, il vient $\alpha \ell^4 \leqslant \ell^2 + \ell$. Comme $\ell \geqslant |u_0| > 0$, on peut simplifier par ℓ, ce qui donne $\alpha \ell^3 \leqslant \ell + 1$, soit $P(\ell) \leqslant 0$. Or $P(\ell) \geqslant P(v_3) \geqslant P(|u_3|) > 0$, ce qui est contradictoire. Conclusion : aucun réel de l'intervalle $\left[\frac{9}{7}; 2\right[$ ne vérifie la propriété $\mathscr{B}$.

7. (a) Montrons par récurrence sur $k \geqslant 1$ que $u_{n+k} = u_{n+1}^{2^{k-1}} S_k(x_n)$. C'est évident pour $k = 1$. Montrons-le pour $k = 2$:

$$u_{n+1}^2 S_2(x_n) = u_{n+1}^2\left(1 - \alpha x_n^4\right) = u_{n+1}^2\left(1 - \alpha u_n^4 / u_{n+1}^2\right) = u_{n+2}.$$

Supposons maintenant la propriété vraie aux rangs k et $k-1$ pour un certain $k \geqslant 2$. Alors

$$u_{n+k+1} = u_{n+k}^2 - \alpha u_{n+k-1}^4 = u_{n+1}^{2^k} S_k(x_n)^2 - \alpha u_{n+1}^{2^k} S_{k-1}(x_n)^2 = u_{n+1}^{2^k} S_{k+1}(x_n),$$

ce qui prouve la propriété au rang $k+1$.

(b) Notons (P_n) la propriété : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n^2 < t(\alpha)^2 u_{n+1}$. Soit n vérifiant (P_n). Les inégalités

$$1 < S_4(x) \leqslant S_3(x)^2 \leqslant t(\alpha)^2 S_4(x)$$

sont équivalentes, d'après la question précédente, à

$$1 < \frac{u_{n+4}}{u_{n+1}^8} \leqslant \left(\frac{u_{n+3}}{u_{n+1}^4}\right)^2 < t(\alpha)^2 \frac{u_{n+4}}{u_{n+1}^8},$$

ce qui se simplifie en

$$u_{n+1}^8 < u_{n+4} \leqslant u_{n+3}^2 < t(\alpha)^2 u_{n+4}$$

Or (P_n) entraîne que $u_{n+1} \geqslant 1$, donc les inégalités précédentes impliquent (P_{n+3}). Comme (P_0) est vraie, on en déduit par récurrence immédiate que (P_{3k}) est vraie pour tout k. D'autre part, on vient de voir que si n vérifie (P_n) alors $u_{n+1}^8 < u_{n+4}$. Pour $n = 0$ cela entraîne $u_4 > 1$. D'autre part, pour $n = 3k$ on obtient $u_{3k+1}^8 < u_{3(k+1)+1}$ donc par récurrence immédiate, $u_{3k+1} > u_4^{8(k-1)}$, ce qui montre que α ne vérifie pas la propriété $\mathscr{B}$.

8. (a) $S_4(x) = S_3(x)^2 - \alpha S_2(x)^4 \leqslant S_3(x)^2$ car $\alpha \geqslant 0$.

(b) Posons $\alpha = 1+\beta$ avec $0<\beta<2/7$. Soit $x\in[1;t(\alpha)]$. On a

$$1-\alpha t(\alpha)^4 \leqslant 1-\alpha x^4 = S_2(x) \leqslant 1-\alpha < 0$$

donc $0<(\alpha-1)^2 \leqslant S_2(x)^2 \leqslant \left(\alpha t(\alpha)^4-1\right)^2$, ce qui donne

$$0 < S_2(x)^2 \leqslant (\alpha(\alpha+2)/3-1)^2$$

En remplaçant α par $1+\beta$, il vient

$$0<S_2(x)^2 \leqslant ((1+\beta)(3+\beta)/3-1)^2 = \beta^2(\beta+4)^2/9 < \frac{2\beta}{7\times 9}\left(\frac{2}{7}+4\right)^2 = \frac{200}{343}\beta.$$

Or $\frac{200}{343} < \frac{7}{12}$ donc on obtient bien

$$0<S_2(x)^2 \leqslant \frac{7(\alpha-1)}{12}$$

(c) On a $S_3(x) = S_2(x)^2-\alpha$ et

$$S_4(x) = S_3(x)^2 - \alpha S_2(x)^4 = (1-\alpha)S_2(x)^4 - 2\alpha S_2(x)^2 + \alpha^2$$

donc il suffit de montrer que $f\left(S_2^2\right)<0$ où $f(x) = (\alpha-1)x^2+2\alpha x+1-\alpha^2$. Comme f est un polynôme du second degré avec coefficient dominant strictement positif, l'ensemble des x tels que $f(x)<0$ est un intervalle ouvert, donc il suffit de montrer qu'il contient 0 et $7(\alpha-1)/12$.
On a clairement $f(0)=1-\alpha^2<0$. On a

$$f(7(\alpha-1)/12) = \frac{(\alpha-1)\left(49\alpha^2-74\alpha-95\right)}{144}$$

donc il suffit de montrer que $49\alpha^2-74\alpha-95<0$. Notons $g(\alpha)$ ce polynôme du second degré, alors $g(1)=-120<0$ et $g(9/7) = -764/7<0$, ce qui conclut.

(d) Posons $x=t(\alpha)$. On a $S_3(x) = S_2(x)^2-\alpha \leqslant 7(\alpha-1)/12-\alpha = -(5\alpha+7)/12$.
Montrons l'inégalité $S_3(x)^2 \leqslant \frac{2+x^4}{3}S_4(x)$. Celle-ci équivaut à

$$S_3(x)^2 \leqslant \frac{2+(\alpha+2)/3}{3}\left(S_3(x)^2-\alpha S_2(x)^4\right),$$

ce qui se simplifie en

$$\frac{\alpha-1}{9}S_3(x)^2 \geqslant \frac{\alpha(\alpha+8)}{9}S_2(x)^4.$$

Or $S_3(x)^2 \geqslant (5\alpha+7)^2/144$ et $S_2(x)^2 \leqslant 7(\alpha-1)/12$ donc il suffit de montrer que

$$\frac{(\alpha-1)(5\alpha+7)^2}{9\times 144} \geqslant \frac{\alpha(\alpha+8)}{9}\times\left(\frac{7(\alpha-1)}{12}\right)^2$$

L'inégalité se simplifie en $(5\alpha+7)^2 \geqslant \alpha(\alpha+8)\times 49(\alpha-1)$.
Or $\alpha(\alpha+8) \leqslant \frac{9}{7}\times\frac{56}{7} = \frac{585}{49}$ donc il suffit de montrer que $(5\alpha+7)^2 \geqslant 585(\alpha-1)$.
La fonction $\alpha \mapsto (5\alpha+7)^2-585(\alpha-1)$ ayant pour dérivée $10(5\alpha+7)-585 \leqslant \frac{940}{7}-585<0$ pour tout $\alpha<9/7$, il suffit de vérifier que l'inégalité est vraie pour $\alpha=9/7$, ce qui est le cas puisque

$$\left(5\times\frac{9}{7}+7\right)^2 = \frac{8836}{49} > \frac{1170}{7} = 585\left(\frac{9}{7}-1\right)$$

(e) Soit $T(x) = \frac{S_4(x)}{S_3(x)^2}$. On a $T(x) = 1-\alpha\frac{S_2(x)^4}{S_3(x)^2}$, donc T a le même sens de variation que $x\mapsto\frac{S_3(x)^2}{S_2(x)^4}$. Or $S_3(x)<0$ (voir la première ligne de la réponse à la question d) donc T a le même sens de variation que $\dfrac{-S_3(x)}{S_2(x)^2} = -1 + \dfrac{\alpha}{S_2(x)^2}$. Puisque $S_2(x) = 1 - \alpha x^4$ est décroissante négative, $x \mapsto S_2(x)^2$ est croissante donc T est décroissante. f) On a déjà montré à la question c que $1 < S_4(x)$ pour tout $x \in [1; t(\alpha)]$. Il reste à voir que $1 \leqslant \dfrac{S_3(x)^2}{S_4(x)} \leqslant t(\alpha)^2$, ce qui équivaut à

$$\frac{1}{t(\alpha)^2} \leqslant T(x) \leqslant 1$$

Comme T est décroissante sur $[1; t(\alpha)]$, il suffit de vérifier que $T(1) \leqslant 1$ et que $T(t(\alpha)) \geqslant \dfrac{1}{t(\alpha)^2}$. La première inégalité a été démontrée à la question a) et la deuxième à la question d).

9. On a montré que les réels $\neq 2$ qui vérifient la propriété $\mathscr{B}$ sont ceux qui appartiennent à $[0;1]$. Il reste à examiner le cas $\alpha = 2$. La suite vérifie alors $u_n = -1$ pour tout $n \geqslant 2$, donc 2 vérifie la propriété $\mathscr{B}$. On en déduit que l'ensemble des réels qui vérifient la propriété $\mathscr{B}$ est $[0;1] \cup \{2\}$.

Exercice 3

1. Une fonction constante $f(x) = c$ vérifie $\mathscr{E}$ si $c = \dfrac{1}{2} + \sqrt{c - c^2}$. En retranchant $\dfrac{1}{2}$ et en élevant au carré, il vient $c^2 - c + \dfrac{1}{4} = c - c^2$, ce qui équivaut à l'équation du second degré $c^2 - c + \dfrac{1}{8} = 0$. Cette dernière admet pour solutions $c = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$. Or $c = \dfrac{1}{2} + \sqrt{c - c^2} \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc nécessairement $c = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$. Réciproquement vérifions que cette valeur convient. Par construction on a $\left(c - \dfrac{1}{2}\right)^2 = c - c^2$. Comme $c > \dfrac{1}{2}$ on en déduit $c - \dfrac{1}{2} = \sqrt{c - c^2}$.
2. On effectue le changement de fonction inconnue $f(x) = (1 + g(x))/2$. L'équation fonctionnelle devient $g(x+1) = \sqrt{1 - g(x)^2}$. La racine carrée est bien définie si $g(x) \in [-1;1]$. D'autre part, comme $g(x+1)$ est une racine carrée pour tout x, la fonction g ne prend que des valeurs positives. Par conséquent g est à valeurs dans $[0;1]$. Pour une telle fonction, en élevant au carré on constate que l'équation équivaut à
$$g(x+1)^2 + g(x)^2 = 1$$
En remplaçant x par $x+1$ il vient $g(x+2)^2 + g(x+1)^2 = 1$, donc $g(x+2) = g(x)$. Par conséquent f est 2 -périodique.
3. Cela revient à chercher $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ continue telle que $g(0) = 0$ et, pour tout x, $g(x+1)^2 + g(x)^2 = 1$. Il suffit de poser $g(x) = \left|\sin\left((2k+1)\dfrac{\pi x}{2}\right)\right|$ pour $k \in \mathbb{Z}$ arbitraire, soit
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left|\sin\left((2k+1)\frac{\pi x}{2}\right)\right|$$