Du côté des élèves de Terminale : concours général 2023

Exercice 1 : Soyons rationnels !

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $v(n)$ le plus grand entier k tel que $\dfrac{n}{2^k}$ soit un entier.
On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par récurrence, en posant $u_1 = 1$ puis, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_{n-1} = 0\,; \\ 1 + 2v(n) - \dfrac{1}{u_{n-1}} & \text{si } u_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

1. Donner la valeur des entiers $v(1)$, $v(2)$, $v(3)$ et $v(4)$.

2. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $v(n) = 0$ si n est impair et que $v(n) = v\left(\dfrac{n}{2}\right) + 1$ si n est pair.

3. Calculer les huit premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et vérifier que $u_8 = 4$.

4. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que u_n est un nombre rationnel strictement positif, que $u_{2n} = u_n + 1$ et que $u_{2n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.

5. Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un terme u_n.

6. Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un unique terme u_n.

Exercice 2 : Limite sympathique !

Partie A : Quelques exemples

1. On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation

$$x^2 + \frac{1}{n}x - 1 = 0,$$

d'inconnue x.

a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note x_n. Exprimer x_n en fonction de n.

b) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge ; on note x_∞ sa limite.

c) Démontrer que x_∞ est solution de l'équation

$$x^2 - 1 = 0.$$

2. On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation

$$\frac{1}{n}y^2 - y - 1 = 0,$$

d'inconnue y.

a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note y_n.

b) Démontrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

3. On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation

$$z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1 = 0,$$

d'inconnue z.

a) Soit n un entier naturel non nul.

(i) Étudier les variations de la fonction $z \mapsto z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1$ sur l'intervalle $[\,0, +\infty\,[$.

(ii) En déduire que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note z_n. Démontrer que z_n appartient à l'intervalle $]\,0, 1\,[$.

b) Démontrer que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
On pourra s'intéresser au signe du réel $z_{n+1}^3 + \frac{1}{n}z_{n+1}^2 - 1$.

c) On note z_∞ la limite de la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$. Démontrer que z_∞ est solution de l'équation

$$z^3 - 1 = 0.$$

4. On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation

$$\frac{1}{n}t^3 - t^2 - 1 = 0,$$

d'inconnue t.

a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle ; on la note t_n.

b) La suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Partie B : Polynômes sympathiques

Dans les deux prochaines parties, on considère un entier $d \geqslant 1$. La fonction P est un *polynôme de degré au plus* d s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_d$ tels que

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

pour tout réel x.
Soit $P\colon x \mapsto a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polynôme de degré au plus d.
On dit que :

- ▷ P est *initialement sympathique* si $a_0 = -1$ et si $a_k \geqslant 0$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant d$;
- ▷ P est *faussement sympathique* si $a_0 = -1$ et si $a_k \leqslant 0$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant d$;
- ▷ P est *vraiment sympathique* si $a_0 = -1$ et s'il existe un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant d-1$ et pour lequel $a_1 \leqslant 0, a_2 \leqslant 0, \dots, a_k \leqslant 0$ et $a_{k+1} > 0, a_{k+2} \geqslant 0, \dots, a_d \geqslant 0$.

Enfin, on dit que P est *sympathique* s'il est initialement, faussement ou vraiment sympathique.

5. Quels sont les polynômes qui sont à la fois faussement sympathiques et initialement sympathiques ?

6. Démontrer que tout polynôme faussement sympathique est

a) strictement négatif sur l'intervalle $[\,0, +\infty\,[$;

b) décroissant sur l'intervalle $[\,0, +\infty\,[$.

7. Soit P un polynôme vraiment sympathique et initialement sympathique.

a) Démontrer que P est strictement croissant sur l'intervalle $[\,0, +\infty\,[$;

b) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive.

8. Soit P un polynôme vraiment sympathique mais pas initialement sympathique.

a) Démontrer qu'il existe un réel $b > 0$, un entier $\ell \geqslant 0$ et un polynôme Q vraiment sympathique tels que

$$P'(x) = bx^{\ell}Q(x)$$

pour tout réel x.

b) Démontrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que le polynôme P vérifie les quatre propriétés suivantes :

- ▷ P est décroissant sur l'intervalle $[\,0, r\,]$;
- ▷ P est strictement croissant sur l'intervalle $[\,r, +\infty\,[$;

▷ P est strictement négatif sur l'intervalle $[\,0, r\,]$;

▷ l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[\,r, +\infty\,[$.

9. Quels sont les polynômes sympathiques P pour lesquels l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution strictement positive ? Donner, dans ce cas, le tableau de signes de P sur l'intervalle $[\,0, +\infty\,[$.

Partie C : De la suite dans les idées

On considère désormais des polynômes vraiment sympathiques $P_1, P_2, \ldots$ Puisque ces polynômes sont de degré au plus d, on peut écrire chaque polynôme P_n sous la forme

$$P_n\colon x \mapsto a_{d,n}x^d + a_{d-1,n}x^{d-1} + \cdots + a_{2,n}x^2 + a_{1,n}x + a_{0,n}.$$

On suppose en outre, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant d$, que la suite $(a_{k,n})_{n\geqslant 1}$ est convergente ; on note $a_{k,\infty}$ sa limite.
On considère alors le polynôme P_∞ défini par

$$P_\infty\colon x \mapsto a_{d,\infty}x^d + a_{d-1,\infty}x^{d-1} + \cdots + a_{2,\infty}x^2 + a_{1,\infty}x + a_{0,\infty}.$$

Enfin, pour tout entier $n \geqslant 1$, on note x_n l'unique solution strictement positive de l'équation $P_n(x) = 0$. Ci-dessous, on étudie la convergence éventuelle de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

10. Soit t un réel fixé. Démontrer que la suite $(P_n(t))_{n\geqslant 1}$ converge vers $P_\infty(t)$.

11. Démontrer que le polynôme P_∞ est sympathique.

12. On suppose dans cette question que le polynôme P_∞ est vraiment sympathique, et on note x_∞ l'unique solution strictement positive de l'équation $P_\infty(x) = 0$.

a) Soit u et v deux réels tels que $0 < u < x_\infty < v$. Démontrer qu'il existe un entier $M_{u,v}$ tel que $P_n(u) < 0 < P_n(v)$ pour tout entier $n \geqslant M_{u,v}$.

b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers x_∞.

13. On suppose dans cette question que le polynôme P_∞ est faussement sympathique. Démontrer que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.

14. Retrouver les résultats de la partie A.

Exercice 3 : Polynômes et polygones réguliers

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit k un entier tel que $k \geqslant 3$. Les points $M_1, M_2, \ldots, M_k$ sont les sommets d'un polygone *régulier de centre O* si ces points

- ▷ sont deux à deux distincts,
- ▷ apparaissent dans le sens trigonométrique (c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre) sur un même cercle de centre O, et
- ▷ vérifient l'égalité $M_1M_2 = M_2M_3 = \cdots = M_{k-1}M_k = M_kM_1$.

En particulier, pour $k = 3$, il s'agit d'un triangle équilatéral ; pour $k = 4$, il s'agit d'un carré.

Pour tout entier $d \geqslant 0$, une fonction P est un polynôme de *degré* d s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ tels que $a_d \neq 0$ et

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

pour tout réel x ; on pourra admettre que, pour un tel polynôme, l'équation $P(x) = 0$ admet au plus d solutions réelles.
Quant à elle, la fonction

$$P\colon x \mapsto 0$$

est appelée le *polynôme nul*.
Enfin, étant donné un polynôme P (nul ou non), on note $\mathcal{C}_P$ la courbe représentative de P dans le repère $\mathcal{R}$.

Partie A : Triangles équilatéraux

1. Soit P un polynôme de degré 1. Existe-t-il un triangle équilatéral dont les sommets appartiennent à $\mathcal{C}_P$?

2. On considère les points

$$A\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), B\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ et } C\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

a) Démontrer que A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O.

b) Démontrer que les points A, B et C appartiennent à la courbe représentative du polynôme

$$Q\colon x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3}\left(3x^2 - 2\right).$$

c) Démontrer que les points A, B et C appartiennent à la courbe représentative du polynôme

$$R\colon x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3}\left(3x^2 - 2\right) + x\left(x^2 - 1\right).$$

d) Démontrer que, pour tout entier $d \geqslant 2$, il existe un polynôme de degré d dont la courbe représentative contient les points A, B et C.

Partie B : Carrés de centre O

Dans les questions 3 et 4, on considère un polynôme P et un carré $ABCD$ de centre O dont les quatre sommets appartiennent à $\mathcal{C}_P$.

3. ***a)*** Exprimer les coordonnées des points B, C et D en fonction de celles de A. Démontrer que les abscisses de A, B, C et D sont distinctes et non nulles.

b) Démontrer que P est non nul et que son degré vaut au moins 3.

4. On suppose dans cette question qu'il existe des réels a, b et c tels que

$$P : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c.$$

a) Démontrer que $a = 0$ et $c = 0$.

b) Démontrer que les abscisses respectives de A, B, C et D sont solutions de l'équation

$$P(P(x)) + x = 0.$$

c) Démontrer que le polynôme

$$Q : x \mapsto x^4 + 3bx^3 + 3b^2x^2 + b(b^2 + 1)x + b^2 + 1$$

admet au moins deux racines positives distinctes.

d) Démontrer que $b < 0$.

e) On suppose qu'il existe deux réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$ et

$$Q(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2$$

pour tout réel x. Démontrer qu'alors $b = -\sqrt{8}$, puis déterminer les valeurs de α et β.

5. ***a)*** Démontrer qu'il existe un polynôme P de degré 3 et un carré $ABCD$ de centre O dont les sommets appartiennent à $\mathcal{C}_P$.

b) Pour quels entiers d existe-t-il un polynôme de degré d dont la courbe représentative contient les points A, B, C et D obtenus en question 5.a) ?

Partie C : Où l'on prouve que $d \geqslant k - 1$

Soit $M_1M_2 \cdots M_k$ un polygone régulier de centre O. On suppose dans cette question qu'il existe un polynôme P, de degré d, dont la courbe contient les points $M_1, M_2, \ldots, M_k$. On souhaite alors démontrer que $d \geqslant k - 1$.
Pour tout i, on note (x_i, y_i) les coordonnées de M_i dans le repère $\mathcal{R}$.

6. ***a)*** Pourquoi peut-on supposer que x_1 est inférieur ou égal à $x_2, x_3, \ldots, x_k$ et que $y_1 \leqslant 0$?

b) Démontrer que les abscisses x_i sont deux à deux distinctes et que les ordonnées y_i sont non nulles.

c) Démontrer qu'il existe un nombre réel $R > 0$ et un nombre réel θ appartenant à l'intervalle $]\,0, \pi/k\,[$ tels que $x_1 = -R\cos(\theta)$ et $y_1 = -R\sin(\theta)$.

d) Démontrer que $x_1 < x_k < x_2 < x_{k-1} < x_3 < x_{k-2} < \cdots$

e) Démontrer que P admet une racine sur chacun des $k-1$ intervalles

$$]\,x_1, x_k\,[\,,\ ]\,x_k, x_2\,[\,,\ ]\,x_2, x_{k-1}\,[\,,\ ]\,x_{k-1}, x_3\,[\,,\ ]\,x_3, x_{k-2}\,[\,,\ \ldots$$

f) En conclure que $d \geqslant k-1$.

Partie D : Où l'on prouve que tout entier $d \geqslant k-1$ convient

On suppose dans cette partie que les abscisses x_i sont deux à deux distinctes et on veut démontrer que, pour tout entier $d \geqslant k-1$, il existe un polynôme de degré d dont la courbe contient les points $M_1, M_2, \ldots, M_k$.

7. Soit a et b deux réels. Dans le repère $\mathcal{R}$, on considère les points

$$A(\cos(a), \sin(a)),\, B(\cos(a+b), \sin(a+b)) \text{ et } C(-\sin(a), \cos(a)).$$

a) Démontrer que le repère $\mathcal{R}' = (O\,; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ est orthonormé.

b) Quelles sont les coordonnées du point B dans le repère $\mathcal{R}'$?

c) En déduire que

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\ ;\\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).\end{aligned}$$

8. On considère la suite de polynômes définie par $T_0\colon x \mapsto 1$, $T_1\colon x \mapsto x$ et

$$T_{n+2}\colon x \mapsto 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

a) Démontrer que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel θ.

b) Soit θ un réel, et soit $\ell \geqslant 1$ et $j \geqslant 0$ deux entiers. Démontrer que

$$T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) - \cos(\ell\theta)\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right) = \sin(\ell\theta)\sin\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right).$$

c) Démontrer que, pour tout entier $d \geqslant k-1$, il existe un polynôme de degré d dont la courbe contient les points $M_1, M_2, \ldots, M_k$.

Corrigé (par V. Jugé)

Exercice 1 : Soyons rationnels !

1. $v(1) = 0$, $v(2) = 1$, $v(3) = 0$ et $v(4) = 2$.

2. Si n est impair, la fraction $n/2^k$ est irréductible, et son dénominateur vaut 1 si et seulement si $k = 0$, donc $v_2(k) = 0$.

Si n est pair, $n/2$ est strictement positif aussi, donc $v_2(n) \geqslant 1$. En outre, pour tout $k \geqslant 1$, le nombre $n/2^k$ est entier si et seulement si $(n/2)/2^{k-1}$ est entier. Par conséquent, $v_2(n) - 1 = v_2(n/2)$.

3. Les premiers termes de la suite $(v_2(n))_{n\geqslant 1}$ sont $0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3$. On en déduit, de proche en proche, que les premiers termes de la suite (u_n) sont $1, 2, 1/2, 3, 2/3, 3/2, 1/3, 4$.

4. Une récurrence immédiate montre que chaque terme u_n est rationnel. Puisque $u_1 > 0$, on s'attache maintenant à montrer la propriété $\mathcal{P}_n$ selon laquelle $u_{2k} = u_k + 1 > 0$ et $u_{2k+1} = u_k/(u_k + 1) > 0$ pour tout k compris entre 1 et n.

La question précédente nous permet de vérifier $\mathcal{P}_1$. En outre, pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie, on vérifie que

$$\begin{aligned}
u_{2n+2} &= 1 + 2v_2(2n+2) - \frac{1}{u_{2n+1}} = 3 + 2v_2(n+1) - \frac{u_n + 1}{u_n} \\
&= \left(1 + 2v_2(n+1) - \frac{1}{u_n}\right) + 1 = u_{n+1} + 1 \\
u_{2n+3} &= 1 + 2v_2(2n+3) - \frac{1}{u_{2n+2}} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}+1}.
\end{aligned}$$

En particulier, u_{2n+2} et u_{2n+3} sont strictement positifs, ce qui démontre $\mathcal{P}_{n+1}$.

5. Démontrons par récurrence sur $p + q$ que toute fraction irréductible $p/q > 0$ est égale à un terme u_n. En effet,

- si $p = q$, on a $p/q = 1 = u_1$;
- si $p > q$, l'hypothèse de récurrence indique qu'il existe un terme u_n égal à $(p - q)/q$, et alors $p/q = u_{2n}$;
- si $p < q$, l'hypothèse de récurrence indique qu'il existe un terme u_n égal à $p/(q - p)$, et alors $p/q = u_{2n+1}$.

6. Il s'agit de montrer que tout rationnel strictement positif est égal à un unique terme u_n. Pour ce faire, on démontre par récurrence sur n, que nul terme u_n n'est égal à un terme u_k tel que $k < n$. En effet, les termes $u_\ell > 1$ sont ceux pour lesquels ℓ est pair, et les termes $u_\ell < 1$ sont ceux pour lesquels ℓ est impair et $\ell \neq 1$. Par conséquent,

- si $u_k = u_n = 1$, on sait que $k = n = 1$;
- si $u_k = u_n > 1$, on sait que k et n sont pairs, et que $u_{k/2} = u_{n/2}$;
- si $u_k = u_n < 1$, on sait que k et n sont impairs, et que $u_{(k-1)/2} = u_{(n-1)/2}$.

Dans les trois cas, on atteint une absurdité, ce qui conclut l'hérédité et la récurrence.

Exercice 2 : Limite sympathique !

Partie A : Quelques exemples

1. ***a)*** Si l'on pose $\Delta_n = 1 + \dfrac{1}{4n^2}$, les solutions de l'équation sont

$$-\frac{1}{2n} - \sqrt{\Delta_n} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2n} + \sqrt{\Delta_n}.$$

La première est négative, en tant que somme de deux termes négatifs. L'autre est positive puisque $\Delta_n > \dfrac{1}{4n^2}$.

b) Il suffit de remarquer que $-\dfrac{1}{2n} \to 0$ tandis que $\Delta_n \to 1$, de sorte que $x_n \to 1$.

c) On vérifie que $x_\infty^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$.

2. ***a)*** Cette fois-ci, on pose $\Delta_n = n^2/4 + n$, et notre équation a pour solutions $\dfrac{n}{2} \pm \sqrt{\Delta_n}$.

La première est négative car $\Delta_n > n^2/4 = (n/2)^2$, et l'autre est strictement positive.

b) $y_n \geqslant n/2$ donc $y_n \to +\infty$.

3. ***a)*** La fonction $f_n : z \mapsto z^3 + z^2/n - 1$ est de dérivée $3z^2 + 2z/n > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme f_n est continue, strictement négative en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$, le théorème de la bijection indique que f_n amet une unique racine sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, $f_n(1) = 1/n > 0$ donc $z_n < 1$.

b)

$$0 = f_{n+1}(z_{n+1}) = z_{n+1}^3 + \frac{1}{n+1} z_{n+1}^2 - 1 < z_{n+1}^3 + \frac{1}{n} z_{n+1}^2 - 1.$$

Cela signifie en fait que $f_n(z_n) = 0 < f_n(z_{n+1})$ et comme f_n est croissante, on en déduit que $z_{n+1} \geqslant z_n$.

c) Lorsque $n \to +\infty$, on a $\dfrac{1}{n} \to 0$ et $z_n \to z_\infty$ donc

$$z_n^3 + z_n^2/n - 1 \to z_\infty^3 + z_\infty^2 \times 0 - 1 = z_\infty^3 - 1.$$

Comme $z_n^3 + z_n^2/n - 1 = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, cela signifie bien que $z_\infty^3 - 1 = 0$.

4. ***a)*** On étudie les variations de la fonction $g_n : t \mapsto t^3/n - t^2 - 1$. Puisque $g_n'(t) = \dfrac{3t}{n}(t - \dfrac{2n}{3})$, la fonction g_n est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, 2n/3]$. Comme $g_n(0) = -1$, on en déduit que g_n est strictement négative sur les deux intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, 2n/3]$.

Par ailleurs, g_n est strictement croissante sur $[2n/3, +\infty[$. Puisque l'on vient de montrer que $g_n(2n/3) < 0$, et comme g_n tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$, elle admet une unique racine sur $[2n/3, +\infty[$.

b) $t_n \to +\infty$ car $t_n \geqslant 2n/3$.

5. $P(X) = -1$ est l'unique polynôme à la fois faussement et initialement sympathique.

6. ***a)*** C'est une somme de termes négatifs, dont l'un vaut -1.

b) Sa dérivée est une somme de termes négatifs, donc négative.

7. ***a)*** Sa dérivée est une somme de termes positifs non tous nuls, donc elle est strictement positive.

b) P est continue et strictement croissante, vaut -1 en 0, et il existe un terme $a_i > 0$, de sorte que

$$P(x) \geqslant -1 + a_i x^i \to +\infty$$

lorsque $x \to +\infty$. Le théorème de la bijection conclut.

8. ***a)*** L'entier ℓ est le plus petit entier tel que $a_{\ell+1} < 0$, puis $b = -(\ell+1)a_{\ell+1}$. On a alors

$$\begin{aligned} P'(X) &= \sum_{i=0}^{d} i a_i X^i = \sum_{i=\ell+1}^{d} i a_i X^{i-1} = X^\ell \sum_{i=0}^{d-\ell-1} (i+\ell+1)ai+\ell+1X^i \\ &= bX^\ell \left(-1 + \sum_{i=1}^{d-\ell-1} (i+\ell+1)a_{i+\ell+1}X^i/b\right), \end{aligned}$$

et $Q(X)$ est vraiment sympathique.

b) On procède par récurrence sur $\deg P$. Si $\deg P = 0$, P est initialement sympathique donc c'est gagné.

Si $\deg P \geqslant 3$, le polynôme $Q(X)$ obtenu à la question précédente est vraiment sympathique.

On va alors distinguer deux cas, selon que $Q(X)$ est initialement sympathique ou non.

Si Q est initialement sympathique, la question 7 nous dit que Q est strictement croissant sur $[0, +\infty[$ et admet une unique racine strictement positive, disons r. Sinon, Q n'est pas initialement sympathique, et l'hypothèse de récurrence sur Q nous permet d'affirmer que Q admet une racine unique racine $r > 0$ telle que Q est strictement négatif sur $[0, r[$ et strictement croissant, donc positif, sur $]r, +\infty[$.

Dans les deux cas, les polynômes P' et Q sont strictement négatifs sur $]0, r[$ et strictement positifs $]r, +\infty[$. Par conséquent,

- ▷ P est décroissant sur l'intervalle $[0, r]$;
- ▷ P est strictement croissant sur l'intervalle $[r, +\infty[$;
- ▷ P est strictement négatif sur l'intervalle $[0, r]$, car il y est majoré par $P(0) = -1$;
- ▷ P admet une unique racine dans l'intervalle $[r, +\infty[$, car on vient de montrer que $P(r) < 0$, et $P(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

9. Ce sont les polynômes vraiment sympathiques, et ils ont une unique racine strictement positive. Le tableau de signes est

x	0		r		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

.

Partie C : De la suite dans les idées

10. C'est immédiat par opérations (addition et multiplication) sur les limites.

11. La suite $(a_{0,n})_{n \geqslant 1}$ est constante et égale à -1, donc $a_{0,\infty} = -1$. Si tous les coefficients $a_{k+1,\infty}$ sont négatifs ou nuls, le polynôme $P_\infty(X)$ est faussement sympathique.

Sinon soit k le plus petit entier tel que $a_{k+1,\infty} > 0$.

Il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $a_{k+1,n} > 0$ pour tout $n \geqslant N$. Mais alors, puisque $P_n(X)$ est sympathique, on sait que $a_{k+2,n} \geqslant 0, \ldots, a_{d,n} \geqslant 0$. Par conséquent, les limites $a_{k+2,\infty}, \ldots, a_{d,\infty}$ sont positives ou nulles. En particulier, notre choix de k indique bien que $P_\infty(X)$ est sympathique.

12. ***a)*** On a vu précédemment que $P_\infty(u) < 0 < P_\infty(v)$. Puisque $P_n(u) \to P_\infty(u) < 0$ et $P_n(v) \to P_\infty(v) > 0$, il existe un réel $M_{u,v}$ tel que $P_n(u) \leqslant P_\infty(u)/2 < 0$ et $P_n(v) \geqslant P_\infty(v)/2 > 0$ pour tout $n \geqslant M_{u,v}$.

b) Puisque $P_n(u) < 0 < P_n(v)$ lorsque $n \geqslant M_{u,v}$, on sait que $u \leqslant x_n \leqslant v$. Ceci étant valable pour tout intervalle ouvert $]\,u, v\,[$ contenant x_∞, on en conclut que $x_n \to x_\infty$.

13. Soit $t > 0$ un réel. Comme $P_\infty(X)$ est faussement sympathique, $P_\infty(t) < 0$. Avec le même raisonnement qu'en question 12.a), il existe un réel M_t tel que $P_n(t) < 0$ lorsque $n \geqslant M_t$. Par conséquent, $x_n \geqslant t$. Ceci étant valable pour tout t, on en conclut que $x_n \to +\infty$.

14. Dans les cas 1) et 3), nos polynômes vraiment sympathiques convergent vers un polynôme P_∞ vraiment sympathique, donc leurs racines convergent vers la racine de P_∞.

Dans les cas 2) et 4), leur limite P_∞ est faussement sympathique, donc leurs racines divergent vers $+\infty$.

Exercice 3 : Polynômes et polygones réguliers

Partie A : Triangles équilatéraux

1. Non, car $\mathcal{C}_P$ est une droite.

2. ***a)*** On vérifie que $OA^2 = OB^2 = OC^2 = 4/3$, que $AB^2 = BC^2 = CA^2 = 2$ et que A, B, C sont bien listées dans le sens trigonométrique.

b) Il suffit de vérifier que

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3}\left(3 \times 1^2 - 2\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\ ; \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\left(3 \times (-1)^2 - 2\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\ ; \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\left(3 \times \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0. \end{cases}$$

c) Il suffit de vérifier que $R(x) - Q(x) = 0$ lorsque x vaut -1, 0 ou 1.

d) Il suffit de choisir $Q(x)$ lorsque $d = 2$, et $R_d(x) = Q(x) + x^{d-3}(R(x) - Q(x)) = Q(x) + x^{d-2}(x^2 - 1)$ lorsque $d \geqslant 3$.

Partie B : Carrés de centre O

3. ***a)*** Puisque B, C et D s'obtiennent à partir de A via une rotation de centre O et d'angle $90°$, $180°$ ou $270°$, on en déduit que les coordonnées de nos quatre points sont, disons,

$$A(x, y) \qquad B(-y, x) \qquad C(-x, -y) \qquad D(y, -x).$$

Si deux sommets de coordonnées (u, v) et (u', v') ont même abscisse, cela signifie que $v = P(u) = P(u') = v'$, donc qu'il s'agissait en fait du même sommet.

Par ailleurs, si l'un est d'abscisse nulle, cela signifie que $x = 0$ ou $y = 0$, donc le sommet opposé sera aussi d'abscisse nulle, alors qu'on vient de démontrer que les abscisses diffèrent toutes.

b) Soit $P\colon t \mapsto at^2 + bt + c$ un polynôme de degré au plus 2 dont on supposera fallacieusement que sa courbe contient les quatre points A, B, C, D. On sait alors que

$$\begin{cases} y = P(x) = ax^2 + bx + c \\ x = P(-y) = ay^2 - by + c \\ -y = P(-x) = ax^2 - bx + c \\ -x = P(y) = ay^2 + by + c \end{cases}, \text{ c'est-à -dire } \begin{cases} 2y = P(x) - P(-x) = 2bx \\ 2x = P(-y) - P(y) = -2by \\ -y = P(-x) = ax^2 - bx + c \\ -x = P(y) = ay^2 + by + c \end{cases}.$$

En particulier, $4xy = -4b^2xy$, et puisque x et y sont non nuls, on en conclut que $b^2 = -1$, ce qui est impossible, démontrant par là l'invalidité de notre supposition.

4. ***a)*** Cette fois-ci, on constate que

$$\begin{cases} y = P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \\ x = P(-y) = -y^3 + ay^2 - by + c \\ -y = P(-x) = -x^3 + ax^2 - bx + c \\ -x = P(y) = y^3 + ay^2 + by + c \end{cases}, \text{ i.e. } \begin{cases} 0 = y - y = P(x) + P(-x) = 2ax^2 + 2c \\ 0 = x - x = P(-y) + P(y) = 2ay^2 + 2c \\ -y = P(-x) = -x^3 + ax^2 - bx + c \\ -x = P(y) = y^3 + ay^2 + by + c \end{cases}.$$

Ainsi, $-ax^2 = c = -ay^2$. Or, $x \neq \pm y$, car nos abscisses sont deux à deux distinctes. Ainsi, $x^2 \neq y^2$, donc $a = c = 0$.

b) Il suffit de vérifier que

$$\begin{cases} P(P(x)) + x = P(y) + x = -x + x = 0 \\ P(P(-y)) - y = P(x) - y = y - y = 0 \\ P(P(-x)) - x = P(-y) - x = x - x = 0 \\ P(P(y)) + y = P(-x) + y = -y + y = 0 \end{cases}.$$

c) On commence par remarquer que $P(P(X))+X = (X^3+bX)^3+b(X^3+bX)+X = X^9 + 3bX^7 + 3b^2X^5 + b^3X^3 + bX^3 + b^2X + X = XQ(X^2)$ admet $\pm x$ et $\pm y$ pour racines non nulles. Par conséquent, x^2 et y^2, qui diffèrent l'un de l'autre, sont deux racines positives de Q.

d) Si $b \geqslant 0$, le polynôme Q est strictement positif sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

e) Il s'agit de trouver $\alpha < \beta$ tels que

$$Q(X) = X^4 - 2(\alpha+\beta)X^3 + (\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)X^2 - 2(\alpha+\beta)\alpha\beta X + \alpha^2\beta^2.$$

Cela revient à faire en sorte que

$$-2(\alpha+\beta) = 3b,\ \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = 3b^2,\ -2(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2) = b(b^2+1) \text{ et } \alpha^2\beta^2 = b^2 + 1.$$

Or, le terme $-2(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2)$ se factorise comme $-2\alpha\beta(\alpha+\beta)$. On souhaite donc que $-2(\alpha+\beta) = 3b$, puis que $3b\alpha\beta = b(b^2+1)$ et, comme $b < 0$, que $\alpha\beta = (b^2+1)/3$. L'égalité $\alpha^2\beta^2 = b^2+1$ se réécrit alors comme $(b^2+1)^2 = 9(b^2+1)$, c'est-à-dire $(b^2+1)(b^2-8) = 0$. Comme $b < 0$, cela nous assure que $b = -\sqrt{8}$. Ainsi, $\alpha + \beta = 3\sqrt{2}$ et $\alpha\beta = 3$.

Ainsi, α et β sont les deux racines du polynôme $(X-\alpha)(X-\beta) = X^2 - 3\sqrt{2} + 3$, donc, puisque $\alpha < \beta$,

$$\alpha = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \text{ et } \beta = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}.$$

5. ***a)*** Au vu des questions précédentes, on choisit $P(X) = X^3 - 2\sqrt{2}X$ puis $x = \sqrt{\alpha}$ et $y = P(x)$. Puisque $P(P(x)) + x = xQ(x^2) = xQ(\alpha) = 0$, on vérifie alors que $P(y) = P(P(x)) = -x$. Enfin, comme P est impair, on a bien $P(-x) = -y$ et $P(-y) = x$, ce qui conclut.

b) On a démontré en question 3b que $d \geqslant 3$. Réciproquement, si on note (x, y) les coordonnées du point A obtenu en question précédente, et si on pose $P(X) = X^3 - 2\sqrt{2}X$, le polynôme P convient si $d = 3$.

Enfin, si $d \geqslant 4$, le polynôme $Q(X) = P(X) + X^{d-4}(X-x)(X-P(x))(X+x)(X+P(x))$ convient. Ainsi, les entiers recherchés sont les entiers $d \geqslant 3$.

Partie C : Où l'on prouve que $d \geqslant k - 1$

6. ***a)*** Supposer x_1 minimal nécessite uniquement de renuméroter les points à partir d'un sommet M_i d'abscisse minimale, ce qui ne change ni le polygone, ni P. Supposer y_1 négatif ou nul nécessite éventuellement d'appliquer au polygone et à $\mathcal{C}_P$ une symétrie par rapport à l'axe des abscisses, ce qui revient à transformer P en $-P$. Ces deux suppositions sont donc bénignes.

b) Si deux abscisses x_i et x_j coïncident, les deux points M_i et M_j ont même ordonnée $y_i = P(x_i) = P(x_j) = y_j$, donc $i = j$. Par ailleurs, si une ordonnée y_i est nulle, les deux points M_{i-1} et M_{i+1} sont symétriques par rapport à l'axe (OM_i), qui n'est autre que l'axe des abscisses. Ainsi, $x_{i-1} = x_{i+1}$, ce qui est impossible.

c) Il suffit de choisir R égal à la distance OM_1. Dans ces conditions, chaque point M_i a pour coordonnées $(-R\cos(\theta_i), -R\sin(\theta_i))$, et $\theta_{i+1} - \theta_i = 2\pi/k$.

Puisque $y_1 < 0$ et $x_1 < x_k$, on sait que $0 < \theta_1 < \pi$ et que $\cos(\theta_k) < \cos(\theta_1)$. Puisque $\theta_k = \theta_1 - 2\pi/k$, on constate alors que

- ▷ si $2\pi/k \leqslant \theta_1$, l'inégalité $0 \leqslant \theta_k < \theta_1 \leqslant \pi$ contredit l'inégalité $\cos(\theta_k) < \cos(\theta_1)$;
- ▷ si $\pi/k \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi/k$, l'inégalité $0 \leqslant 2\pi/k - \theta_1 \leqslant \theta_1 \leqslant \pi$ contredit l'inégalité $\cos(\theta_k) = \cos(2\pi/k - \theta_k) < \cos(\theta_1)$.

Ainsi, comme prévu, on peut choisir $\theta = \theta_1 \in]\,0, \pi/k\,[$.

d) Posons $a = \theta_1$ et $b = 2\pi/k - \theta_1$. On vient de démontrer que $0 < a < b < 2\pi_k$, et que $x_i = -R\cos(a(i+1) + bi)$, tandis que $x_{k-i} = -R\cos(ai + b(i+1))$. Puisque cos est décroissante et que $a < b < a + b < a + 2b < 2a + 2b < 2a + 3b < \cdots$, le résultat désiré s'ensuit.

e) Le choix de θ impose les inégalités $y_1 < 0, y_k > 0, y_2 < 0, y_{k-1} > 0, y_3 < 0, \ldots$ Le théorème des valeurs intermédiaires démontre alors immédiatement le résultat désiré.

f) On vient d'exhiber $k-1$ racines distinctes pour le polynôme $P(X)$, qui est donc de degré $d \geqslant k - 1$.

Partie D : Où l'on prouve que tout entier $d \geqslant k - 1$ convient

On suppose dans cette partie que les abscisses x_i sont deux à deux distinctes et on veut démontrer que, pour tout entier $d \geqslant k - 1$, il existe un polynôme de degré d dont la courbe contient les points $M_1, M_2, \ldots, M_k$.

7. ***a)*** Il suffit de vérifier que $OA^2 = \cos(a)^2 + \sin(a)^2 = 1$, $OC^2 = \sin(a)^2 + \cos(a)^2 = 1$ et que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\cos(a)\sin(a) + \sin(a)\cos(a) = 0$.

b) Soit X le point de coordonnées $(1, 0)$ dans le repère $\mathcal{R}$. Le repère $\mathcal{R}'$ est obtenu en appliquant à $\mathcal{R}$ une rotation de centre O et d'angle a. Le point B est obtenu en appliquant à X une rotation de centre O et d'angle $a + b$, c'est-à -dire en appliquant à A une rotation de centre O et d'angle B. Par conséquent, ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$ sont $(\cos(b), \sin(b))$.

c) Pour la première égalité, il suffit de vérifier que $\cos(a + b) = \overrightarrow{OB} \cdot \vec{\imath} = (\cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{OC}) \cdot \vec{\imath} = \cos(b)\overrightarrow{OA} \cdot \vec{\imath} + \sin(b)\overrightarrow{OC}\vec{\imath} = \cos(b)\cos(a) - \sin(b)\sin(a)$. Pour la seconde, on procède de même, mais en remplaçant b par $-b$.

8. ***a)*** On procède par récurrence forte. Le résultat est acquis pour $n = 0$ et $n = 1$ puis, s'il est acquis pour deux entiers n et $n-1$, on constate alors que

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= (\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \sin(\theta)\sin((n+1)\theta)) \\ &+ (\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) + \sin(\theta)\sin((n+1)\theta)) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta), \end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence.

b) Posons $m = \theta + 2j\pi/\ell$. Il suffit de vérifier que

$$\sin(\ell\theta)\sin(m) + \cos(\ell\theta)\cos(m) = \cos(\ell\theta - m) = \cos(\ell\theta + 2j\pi - m)$$

$$= \cos((\ell-1)m) = T_{\ell-1}(\cos(m)).$$

c) Le raisonnement effectué aux questions 6.a) à c) est toujours valide. On peut donc supposer qu'il existe un réel $R > 0$ et un réel $0 < \theta < \pi/k$ pour lesquels chaque point M_j est de coordonnées

$$(x_j, y_j) = \left(-R\cos\left(\theta + \frac{2(j-1)\pi}{k}\right), -R\sin\left(\theta + \frac{2(j-1)\pi}{k}\right)\right).$$

Notons en particulier que $\sin(k\theta) > 0$.

On pose alors

$$P(X) = \frac{-RT_{k-1}(-x/R) - \cos(k\theta)x}{\sin(k\theta)}.$$

En effet, l'égalité obtenue en question 8.b) indique précisément que

$$\begin{aligned} P(x_j) &= -R \times \frac{T_{k-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2(j-1)\pi}{k}\right)\right) - \cos(k\theta)\cos\left(\theta + \frac{2(j-1)\pi}{k}\right)}{\sin(k\theta)} \\ &= -R\sin\left(\theta + \frac{2(j-1)\pi}{k}\right) = y_j. \end{aligned}$$

Enfin, une récurrence immédiate sur n démontre que $T_n(X)$ est de degré n. Puisque $k \geqslant 3$, le polynôme $P(X)$ est de degré $k-1$. On conclut donc en choisissant, lorsque $d \geqslant k$, le polynôme

$$P(X) + X^{d-k}(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)\cdots(X - x_k).$$