CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE LYON-CACHAN 1997

Partie I

I.1. Soit $\gamma' \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned}\rho_{\gamma'} \circ \pi &= \frac{1}{\#\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma}\rho_{\gamma'}\circ\rho_\gamma\\ &= \frac{1}{\#\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma}\rho_{\gamma'\gamma}\\ &= \frac{1}{\#\Gamma}\sum_{\gamma"\in\Gamma}\rho_{\gamma"} = \pi\end{aligned}$$

car $\gamma \mapsto \gamma'\gamma$ est une bijection de Γ sur lui-même. On en déduit que

$$\pi\circ\pi = \frac{1}{\#\Gamma}\sum_{\gamma"\in\Gamma}\rho_\gamma\circ\pi = \pi$$

i.e. π est un projecteur.

Si $x \in E_\Gamma$ alors $\pi(x) = x$ i.e. $E_\Gamma \subset \operatorname{Im}\pi$.

Réciproquement : si $x \in \operatorname{Im}\pi$ alors $\pi(x) = x$ et, pour tout $\gamma' \in \Gamma$, $\rho_{\gamma'}\circ\pi(x) = \rho_{\gamma'}(x) = \pi(x) = x$ et donc $x \in E_\Gamma$.

Conclusion : on a bien $E_\Gamma = \operatorname{Im}\pi$.

Enfin, comme la trace d'un projecteur est égale à la dimension de son image (se placer dans une bonne base), on a $\operatorname{Tr}(\pi) = \dim E_\Gamma$.

I.2. Soient (E,ρ) et (E',ρ') deux Γ-espaces tels que $\chi_E = \chi_{E'}$. On a donc $\chi_E(1_\Gamma) = \chi_{E'}(1_\Gamma)$ ce qui signifie que $\dim E = \dim E'$.

En conclusion, on a la formule

$$\dim E = \operatorname{Tr}(\rho_{1_\Gamma}) = \chi(1_\Gamma) = \dim\chi.$$

I.3. L'application trace étant linéaire, on a

$$\operatorname{Tr}(\pi) = \dim E_\Gamma = \frac{1}{\#\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma}\operatorname{Tr}(\rho_\gamma) = \frac{1}{\#\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma}\chi_E(\gamma).$$

I.4. Prouvons tout d'abord l'égalité fournie par l'énoncé : si $f \in K^X$ et si $f = \sum_{x\in X}\lambda_x e_x$ (où $\lambda_x = f(x)$). Soit $\gamma\in\Gamma$ alors

$$\begin{aligned}\gamma.f &= \sum_{x\in X}\lambda_x(\gamma.e_x)\\ &= \sum_{x\in X}\lambda_x e_{\gamma.x}\\ &= \sum_{y\in X}\lambda_{\gamma^{-1}.y}e_y\end{aligned}$$

car $x\mapsto\gamma.x$ est une bijection de X sur X. On a donc $(\gamma.f)(x) = \lambda_{\gamma^{-1}x} = f(\gamma^{-1}.x)$.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ invariant par } \Gamma &\Leftrightarrow (\forall\gamma\in\Gamma,\ \gamma.f=f)\\ &\Leftrightarrow (\forall\gamma\in\Gamma,\ \forall x\in X,\ f(\gamma^{-1}.x)=f(x))\\ &\Leftrightarrow (\forall(x,y)\in X^2,\ x\mathcal{R}y\Rightarrow f(x)=f(y)) \end{aligned}$$

ou encore, $f(x)$ ne dépend que de l'orbite de x.

Notons X_Γ le sous-espace des invariants de K^X (i.e. K^X_Γ), $X_1,\dots,X_s$ les orbites de X sous Γ. On définit $f_i\in X_\Gamma$ par $f_i(X_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}$.

Les $(f_i)_{i\in[1,s]}$ forment une famille libre (évident).

Si $f\in X_\Gamma$ alors $f=\sum\limits_{i=1}^{s} f(X_i)f_i$ donc la famille $(f_i)_{i\in[1,s]}$ est génératrice. On a affaire à une base d'où la conclusion :

$$\dim X_\Gamma = s \text{ nombre d'orbites de } X \text{ sous } \Gamma.$$

I.5. **a.** Explicitons ρ_γ :

Si $u=\sum\limits_{x\in X}\lambda_x e_x$ alors $\rho_\gamma(u)=\sum\limits_{x\in X}\lambda_x e_{\gamma.x}$ i.e. ρ_γ induit une permutation des vecteurs de la base canonique, sa matrice est une matrice de permutation. Or la trace d'une matrice de permutation est égale au nombre de 1 sur la diagonale ce qui correspond ici au nombre de $x\in X$ tels que $\gamma.x=x$. On a bien

$$\chi_X(\gamma)=r_\gamma.$$

b. On a vu au 4 que $s=\dim E_\Gamma$ où $E=K^X$ et au 3 que $\dim E_\Gamma=\dfrac{1}{\#\Gamma}\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}\chi_E(\gamma)$. Vu que $\chi_E(\gamma)=\chi_X(\gamma)=r_\gamma$, on obtient la formule :

$$\frac{1}{\#\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma = s$$

d'où le résultat demandé en multipliant par $\#\Gamma$.

I.6. Avec $s=1$, on a $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma=\#\Gamma$. Or, si $\gamma=1_\Gamma$, $r_\gamma=\#X\geq 2$.

Si $r_\gamma\geq 1$ pour tout $\gamma\in\Gamma$ alors

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma = r_{1_\Gamma}+\sum_{\gamma\neq 1_\Gamma} r_\gamma \geq \#X+(\#\Gamma-1)\geq \#\Gamma+1$$

ce qui est impossible donc il existe γ dans Γ tel que $r_\gamma=0$ et γ est alors sans point fixe.

Partie II

II.1. On peut obtenir ce résultat avec un calcul matriciel. Si $A=E_{ij}$ est la matrice de f, $V=(v_{hk})$, $U=(u_{hk})$ les matrices de U et V alors

$$VE_{ij}U=\begin{pmatrix} v_{1i}u_{j1} & \dots & v_{1i}u_{jn}\\ \vdots & & \vdots\\ v_{pi}u_{j1} & \dots & v_{pi}u_{jn}\end{pmatrix} = v_{ii}u_{jj}E_{ij}+\cdots$$

et comme $\operatorname{Tr}(\psi)=\sum\limits_{i,j} v_{ii}u_{jj}=\operatorname{Tr}(u)\operatorname{Tr}(v)$, on a bien le résultat demandé.

II.2. **a.** On remarque tout d'abord que :

$$\begin{aligned}\gamma.(\gamma'.u)(x) &= \gamma.(\gamma'.u(\gamma'^{-1}.x)) \\ &= \gamma.[\gamma'.u(\gamma^{-1}\gamma'^{-1}.x)] \\ &= (\gamma.\gamma').u\left((\gamma\gamma')^{-1}.x\right) \\ &= [(\gamma\gamma').u](x)\end{aligned}$$

ce qui donne $\gamma.(\gamma'.u) = (\gamma\gamma').u$. On vérifie alors que ρ_γ est une bijection de $\mathcal{L}(E,F)$ sur lui-même car $\rho_{\gamma^{-1}} \circ \rho_\gamma = \mathrm{Id}$. On a donc muni $\mathcal{L}(E,F)$ d'une structure de Γ-espace.

b. Si on note $\rho_\gamma \in \mathcal{L}(F)$ et $\rho'_{\gamma^{-1}} \in \mathcal{L}(E)$ les représentations de Γ sur F et E alors :

$$\begin{aligned}\gamma.u &= \rho_\gamma \circ u \circ \rho'_{\gamma^{-1}} = \psi(u) \\ \chi_{\mathcal{L}(E,F)}(\gamma) &= \mathrm{Tr}(\rho_\gamma) = \mathrm{Tr}(\psi) = \mathrm{Tr}(\rho'_{\gamma^{-1}}).\,\mathrm{Tr}(\rho_\gamma) \\ &= \chi_E(\gamma^{-1}).\chi_F(\gamma)\end{aligned}$$

II.3. **a.** $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ est une bijection de Γ donc

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \frac{1}{\#\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)g(\gamma^{-1})\frac{1}{\#\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma^{-1})g(\gamma) \\ &= \langle g, f\rangle\end{aligned}$$

donc la forme bilinéaire en question est symétrique.
Montrons qu'elle est non dégénérée : i.e. si $\langle f, g\rangle = 0$ pour tout g alors $f = 0$.
Soit $\gamma' \in \Gamma$ et g définie par $g(\gamma^{-1}) = \begin{cases}\#\Gamma & \text{si } \gamma = \gamma' \\ 0 & \text{si } \gamma \neq \gamma'\end{cases}$ alors $\langle f, g\rangle = f(\gamma') = 0$ et comme on peut faire cette opération pour tout γ' de Γ, on en déduit que $f = 0$.

b. On a

$$\begin{aligned}\langle \chi_E, \chi_F\rangle &= \frac{1}{\#\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma}\chi_E(\gamma^{-1})\chi_F(\gamma) \\ &= \frac{1}{\#\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma}\chi_{\mathcal{L}(E,F)}(\gamma) \text{ vu le II.2.b} \\ &= \dim \mathcal{L}(E,F)_\Gamma \text{ vu le I.3}\end{aligned}$$

où $\mathcal{L}(E,F)_\Gamma$ désigne les applications linéaires Γ-invariantes de $\mathcal{L}(E,F)$.
Or

$$\begin{aligned}\varphi \in \mathcal{L}(E,F)_\Gamma &\Leftrightarrow (\forall\gamma \in \Gamma,\ \gamma.\varphi = \varphi) \\ &\Leftrightarrow (\forall\gamma \in \Gamma,\ \forall x \in E,\ \gamma.\varphi(\gamma^{-1}x) = \varphi(x)) \\ &\Leftrightarrow (\forall\gamma \in \Gamma,\ \forall x \in E,\ \varphi(\gamma^{-1}x) = \gamma^{-1}.\varphi(x)) \\ &\Leftrightarrow (\varphi \in \hom_\Gamma(E,F))\end{aligned}$$

donc $\langle \chi_E, \chi_F\rangle = \dim \hom_\Gamma(E,F)$.
Soit $\varphi = \mathrm{Id}_E$ alors $\varphi \neq 0$ et $\varphi \in \hom_\Gamma(E,E)$ donc $\dim \hom_\Gamma(E,E)\rangle 0$ i.e., si $E \neq \{0\}$ alors $\langle \chi_E, \chi_E\rangle$ est un entier strictement positif.

II.4. **a.** On munit K d'une structure de Γ-espace en définissant $\gamma.x = x$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in K$. On a bien évidemment $\chi_K(\gamma) = 1$ et donc la fonction constante 1 est bien un caractère.

Vu le I.3

$$\begin{aligned}\langle \chi_E, \chi_{\mathtt{unit}}\rangle \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma\in\Gamma} \chi_E(\gamma) \\ = \dim E_\Gamma\end{aligned}$$

b. Pour montrer que $\chi + \chi'$ est un caractère, il suffit de définir une structure de Γ-espace sur $E \times E'$ par $\gamma.(x, x') = (\gamma.x, \gamma.x')$. La matrice de cette application linéaire s'écrit $M" = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$ où M et M' désignent les matrices des représentations linéaires sur E et E'. Or $\mathrm{Tr}(M") = \mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(M')$ donc $\chi + \chi'$ est bien un caractère.

c. On reprend les notations du II.2 alors, avec la structure de Γ-espace définie sur K au a, on a $\chi_{\mathcal{L}(E,K)} = \chi_{E^*} = \chi_E^*.\chi_K = \chi_E^*.\chi_{\mathtt{unit}} = \chi_E^*$ car $\chi_{\mathtt{unit}}(\gamma) = 1$ (trace de l'application identique de K dans K). On a donc

$$\chi_E^* = \chi_{E^*}$$

ce qui prouve effectivement que χ^* est un caractère.

d. Si $\chi = \chi_E$ et $\chi' = \chi_F$ alors comme $(\chi^*)^* = \chi$, on a

$$\chi\chi' = (\chi^*)^*\chi' = \chi_{E^*}^*\chi_F = \chi_{\mathcal{L}(E^*,F)}$$

donc $\chi\chi'$ est un caractère.

II.5. On sait que $\rho_{\gamma^2}(x) = \rho(\rho(x))$ i.e. $\rho_{\gamma^2} = (\rho_\gamma)^2$. De même, pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\rho_{\gamma^k} = (\rho_\gamma)^k$. Si $n = \#\Gamma$ alors comme $\gamma^n = 1_\Gamma$ on peut affirmer que $(\rho_\gamma)^n = \mathrm{Id}$. Ceci signifie que les valeurs propres de ρ_γ sont racines de $X^n = 1$ et donc qu'elles sont de module 1.

On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\rho_{\gamma^{-1}}) = \chi_{\rho_{\gamma^{-1}}} &= \chi^* \\ &= \sum_{\lambda\in(\rho_\gamma)} \frac{1}{\lambda} \\ &= \sum_{\lambda\in(\rho_\gamma)} \overline{\lambda} \text{ car } |\lambda| = 1\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}\langle \chi, \chi\rangle &= \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma\in\Gamma} \chi(\gamma)\chi(\gamma^{-1}) \\ &= \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma\in\Gamma} \chi(\gamma)\chi^*(\gamma) \\ &= \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma\in\Gamma} \chi(\gamma)\overline{\chi(\gamma)} \geq \frac{1}{\#\Gamma}|\chi(1_\Gamma)|^2 > 0\end{aligned}$$

Partie III

III.1. **a.** Soit $x \in \ker\varphi$ alors $\forall\gamma \in \Gamma$, $\varphi(\gamma.x) = \gamma\varphi(x) = 0$ donc $\gamma.x \in \ker\varphi$. $\ker\varphi$ est un Γ-sous-espace de E.
Conclusion : $\ker\varphi = \{0\}$ ou E et donc φ est injective ou nul.
Si $y \in \mathrm{Im}\,\varphi$ alors, comme à la question précédente, $\gamma.y \in \mathrm{Im}\,\varphi$ donc $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un Γ-sous-espace. φ est donc soit nul soit surjectif.
Si φ est un Γ-morphisme entre deux espaces irréductibles alors soit φ est nul soit φ est injectif et surjectif i.e. φ est un Γ-isomorphisme.

b. Si $\langle \chi_E, \chi_F \rangle > 0$ alors, vu le II.3.b, on sait que $\hom_\Gamma(E, F)$ est un espace vectoriel de dimension ≥ 1 et donc il existe φ non nul Γ-morphisme de E dans F. On peut dire alors que E et F sont Γ-isomorphes grâce à la question précédente.
Si E et F sont Γ-isomorphes on appelle φ un Γ-isomorphisme. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. On note ρ_γ le morphisme de groupe de Γ dans $\mathrm{GL}(E)$ et ρ'_γ celui de Γ dans $\mathrm{GL}(F)$. On a alors $\varphi \circ \rho_\gamma = \rho'_\gamma \circ \varphi$.
On a donc $\rho_\gamma = \varphi^{-1} \circ \rho'_\gamma \circ \varphi$, les matrices de ρ_γ et ρ'_γ sont semblables, elles ont même trace. On a bien $\chi_E = \chi_F$.
La dernière implication est une conséquence directe de la question II.3.b.

c. Soit $(\chi_1, \dots, \chi_p)$ une famille de caractères irréductibles tous distincts. Soit $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \chi_i = 0$ alors

$$\langle \chi_k, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \chi_i \rangle = \lambda_k \langle \chi_k, \chi_k \rangle = 0$$

donc $\lambda_k = 0$, la famille est bien libre.
Comme K^Γ est un espace vectoriel de dimension Γ alors le nombre de caractères irréductibles est inférieur à $\#\Gamma$.
Soit $\dot{E}$ la classe de Γ-isomorphie de E et $\psi\ : \dot{E} \to \chi_E$, ψ est bien définie (car χ_E ne dépend pas du représentant choisi dans $\dot{E}$) et ψ est injective d'où la bijection.

III.2. **a.** Prouvons que $\widehat{f}$ est un Γ-morphisme :

$$\begin{aligned}
\gamma'.\widehat{f}(x) &= \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma'\gamma.f(\gamma^{-1}.x) \\
&= \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma" \in \Gamma} \gamma".f[\gamma"^{-1}.(\gamma'.x)] \\
&= \widehat{f}(\gamma'.x)
\end{aligned}$$

car $\gamma \mapsto \gamma'\gamma$ est une bijection de Γ.

b. On a $\widehat{\pi}(x) = \dfrac{1}{\#\Gamma} \sum\limits_{\gamma \in \Gamma} \gamma.\pi(\gamma^{-1}.x)$ et donc

$$\begin{aligned}
\gamma'.\pi\left[\gamma'^{-1}.\widehat{\pi}(x)\right] &= \frac{1}{\#\Gamma}\gamma' \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi\Big[\underbrace{\gamma.\pi\left(\gamma^{-1}\gamma'^{-1}.x\right)}_{\in F}\Big] \\
&= \frac{1}{\#\Gamma}\gamma' \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma.\pi\left(\gamma^{-1}\gamma'^{-1}.x\right) \ \text{ car } \pi(y) = y \text{ quand } y \in F \\
&= \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma" \in \Gamma} \gamma".\pi(\gamma"^{-1}.x) \\
&= \widehat{\pi}(x)
\end{aligned}$$

et donc, $\sum\limits_{\gamma' \in \Gamma} \gamma'.\pi\left[\gamma'^{-1}.\widehat{\pi}(x)\right] = \#\Gamma.\widehat{\pi}$ ce qui signifie que $\widehat{\pi}$ est un projecteur.
Si $x \in F$ alors $\gamma^{-1}.x \in F$ et donc $\pi(\gamma^{-1}.x) = \gamma^{-1}.x$ d'où $\widehat{\pi}(x) = x$ i.e. $F \subset \operatorname{Im}\widehat{\pi}$.
Réciproquement, si $\widehat{\pi}(x) = x$ (i.e. $x \in \operatorname{Im}\widehat{\pi}$) alors, avec l'égalité établie ci-dessus, on a $\gamma.\pi\left(\gamma^{-1}.\widehat{\pi}(x)\right) = \widehat{\pi}(x)$ et donc $\gamma.\pi\left(\gamma^{-1}; x\right) = x$ i.e. $\pi(\gamma^{-1}.x) = \gamma^{-1}.x$. Avec $\gamma = 1_\Gamma$, on en déduit que $\pi(x) = x$ et en conclusion $x \in F$.
Conclusion : $\widehat{\pi}$ est un projecteur d'image F.

$\mathrm{Id} - \widehat{\pi}$ est un projecteur et c'est aussi un Γ-morphisme. Son image F' est un supplémentaire de F et c'est le noyau de $\widehat{\pi}$. F' est Γ-stable car si $\widehat{\pi}(x) = 0$ alors $\widehat{\pi}(\gamma.x) = 0$.

On a donc prouvé l'existence d'un supplémentaire F' de F Γ-stable.

c. On raisonne par récurrence sur la dimension de E.

Si $\dim E = 1$ alors E est nécessairement irréductible.

Hypothèse de récurrence : on suppose que tout Γ-espace de dimension $\leq n$ s'écrit comme somme directe de Γ-sous-espaces irréductibles.

Si $\dim E = n + 1$ alors soit E est Γ-irréductible et c'est fini, soit E n'est pas Γ-irréductible et donc il existe F un Γ-sous-espace propre de E. Vu la question précédente, on sait qu'il existe F' un Γ-sous-espace tel que $E = F \oplus F'$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à F et F'.

III.3. **a.** Soit $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$ une décomposition de E en Γ-sous-espaces irréductibles. Si $x \in E$, on écrit $x = x_1 + \cdots + x_k$ la décomposition de x selon la somme directe de E. On a alors $\rho(\gamma)(x) = \rho(\gamma)(x_1) + \cdots + \rho(\gamma)(x_k)$. La restriction de $\rho(\gamma)$ à E_i définit une opération de Γ sur E_i. Le caractère associé est irréductible et donc, il existe, pour chaque espace E_i, un caractère χ_j irréductible. En rassemblant tous les Γ-sous-espaces E_i associés à chaque caractère irréductible χ_j on aura la décomposition suivante

$$\chi_E = d_1\chi_1 + \cdots + d_s\chi_s$$

où chaque entier d_i désigne le nombre de Γ-sous-espaces E_j Γ-isomorphes à V_i.

Cette décomposition est unique car les (χ_i) forment une famille libre.

Ensuite, comme des caractères irréductibles distincts sont orthogonaux (cf III.1.b) on a

$$\langle \chi_E, \chi_i \rangle = \sum_{p=1}^{s} d_p \langle \chi_p, \chi_i \rangle = d_i \langle \chi_i, \chi_i \rangle$$

puis

$$\langle \chi_E, \chi_E \rangle = \sum_{i=1}^{s} d_i \langle \chi_E, \chi_i \rangle = \sum_{i=1}^{s} d_i^2 \langle \chi_i, \chi_i \rangle.$$

b. Soient E et F 2 Γ-espaces Γ-isomorphes et φ le Γ-isomorphisme et $E = E_1 \oplus \cdots E_k$ la décomposition de E en Γ-sous-espaces irréductibles. $\varphi(E_i)$ est Γ-irréductible dans F : par l'absurde, si $\varphi(E_i)$ n'était pas Γ-irréductible, alors il existe H Γ-sous-espace propre de $\varphi(E_i)$ et $\varphi^{-1}(H)$ est un Γ-sous-espace propre de E_i ce qui est impossible. Donc $F = \varphi(E_1) \oplus \cdots \oplus \varphi(E_k)$ est une décomposition de F en somme directe de Γ-sous-espaces irréductibles. En reprenant les arguments de la question précédente, on a $\chi_E = \sum\limits_{i=1}^{s} d_i(E)\chi_i$ et $\chi_F = \sum\limits_{i=1}^{s} d_i(F)\chi_i$ et donc $\chi_E = \chi_F$ avec $d_i(E) = d_i(F)$.

Si $d_i(E) = d_i(F)$ pour chaque i alors on va pouvoir décomposer E et F en somme de Γ-sous-espaces irréductibles, $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ et $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$ chaque espace E_i étant Γ-isomorphe à F_i. Si on appelle φ_i ces Γ-isomorphismes, alors on définit φ un Γ-isomorphisme de E sur F par $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \varphi_i(x_i)$ où $x = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i$ est la décomposition de x dans la somme directe $E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$.

On a bien les équivalences.

III.4. **a.** Soit λ une valeur propre de φ alors $\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}$ est un Γ-morphisme non injectif donc $\varphi - \lambda\,\mathrm{Id} = 0$ (cf III.1.a) et φ est une homothétie.

b. Si E est irréductible alors $\hom_\gamma(E, E)$ est engendré par les homothéties, il est donc de dimension 1. Or $\langle \chi_E, \chi_E \rangle = \dim \hom_\gamma = 1$.

Réciproque : si $\langle \chi_E, \chi_E \rangle = 1 = \sum\limits_{i=1}^{s} d_i^2 \underbrace{\langle \chi_i, \chi_i \rangle}_{=1}$ alors tous les d_i sont nuls sauf 1 et donc $E = E_i$ est irréductible.

Conclusion : E est un Γ-espace irréductible ssi $\langle \chi_E, \chi_E \rangle = 1$.

c. Si Γ est abélien alors $\rho_\gamma \circ \rho_{\gamma'} = \rho_{\gamma'} \circ \rho_\gamma$.

On va alors prouver par récurrence sur la dimension de E que si une famille d'endomorphismes de E commutent deux à deux alors il existe un vecteur propre commun à tous ces endomorphismes.

Si $\dim E = 1$ alors c'est évident.

Supposons la propriété vraie pour tout espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à n et toute famille d'endomorphismes (u_i).

À l'ordre $n+1$: si tous les endomorphismes sont des homothéties alors c'est gagné. Sinon, soit u un endomorphisme non réduit à une homothétie et $E_\lambda(u)$ un sous-espace propre de u de dimension inférieure ou égale à n. $E_\lambda(u)$ est stable par tous les endomorphismes u_i et donc on peut appliquer la propriété de récurrence à $E_\lambda(u)$ et aux endomorphismes de cet espace vectoriel obtenus par restriction des u_i.

On applique alors cette propriétés aux ρ_γ et on peut conclure : les endomorphismes ρ_γ ont un vecteur propre en commun.

Soit E un espace irréductible et x un vecteur propre commun à tous les ρ_γ. L'espace $\mathrm{Vect}(x)$ est alors un Γ-sous-espace ($\rho_\gamma(x) = \lambda_\gamma x$). On en déduit que $\dim E = 1$.

Si $\dim E = 1$ alors E est bien irréductible.

Partie IV

IV.1. **a.** On fait opérer Γ sur $X \times X$ par $\gamma.(x,y) = (\gamma.x, \gamma.y)$. On a deux orbites, $\{(x,x),\ x \in X\}$ et $\{(x,y),\ x \in X,\ y \in X,\ x \neq y\}$. Si on note r'_γ le nombre d'éléments de $X \times X$ fixés par γ alors $\gamma.(x,y) = (x,y)$ ssi $\gamma.x = x$ et $\gamma.y = y$ donc $r'_\gamma = r_\gamma^2$. Il suffit alors d'appliquer la formule du I.5.b d'où

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma^2 = 2 \times \#\Gamma.$$

On a vu, toujours au I.5.b, que $\chi_X(\gamma) = r_\gamma$ et on vérifie que $r_{\gamma^{-1}} = r_\gamma$ donc

$$\begin{aligned} \langle \chi_X, \chi_X \rangle &= \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_X(\gamma) \chi_X(\gamma^{-1}) \\ &= \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma^2 = 2 \end{aligned}$$

b. On écrit que $\varphi(e_y) = \sum\limits_{x \in X} a_{xy} e_x$ et donc, si $a_{\gamma.x,\gamma.y} = a_{x,y}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(e_{\gamma.y}) &= \sum_{x \in X} a_{x,\gamma.y} e_x = \sum_{x' \in X} a_{\gamma.x',\gamma.y} e_{\gamma.x'} \\ &= \sum_{x' \in X} a_{x',y} e_{\gamma.x'} = \gamma. \sum_{x' \in X} a_{x',y} e_{x'} \\ &= \gamma.\varphi(e_y) \end{aligned}$$

ce qui signifie que φ est un Γ-morphisme.

La réciproque se fait en remontant les calculs et en utilisant le fait que les e_x constituent une base.

On aura alors une base de $\hom_\Gamma(K^X, K^X)$ en prenant la famille $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ et φ_1 de matrice $a_{x,y} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$ et donc $\dim \hom(K^X, K^X) = 2 = \langle \chi_X, \chi_X \rangle$ (cf II.3.b).

c. Comme $\gamma. \sum_{x \in X} e_x = \sum_{x \in X} e_{\gamma.x} = \sum_{x \in X} e_x$, on peut dire que V est un Γ-sous-espace stable de K^X. On sait alors (III.2.b) qu'il existe un Γ-sous-espace stable W tel que $K^X = V \oplus W$. Comme V est de dimension 1, il est irréductible donc $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ (cf III.4.b).

On écrit $\chi_W = \sum_{i=1}^{p} d_i \chi_i$ et donc

$$\chi_E = \chi_V + \chi_W = \chi_V + \sum_{i=1}^{s} d_i \chi_i$$
$$= (1 + d_k)\chi_k + \sum_{i \neq k} d_i \chi_i$$

car il existe $k \in [1, s]$ tel que $\chi_V = \chi_k$. On a alors, avec la relation du III.3.a,

$$\langle \chi_E, \chi_E \rangle = (1 + d_k)^2 \langle \chi_k, \chi_k \rangle + \sum_{i \neq k} d_i^2 \langle \chi_i, \chi_i \rangle = 2$$

donc $d_k = 0$ et il existe $j \neq k$ tel que $d_j = 1$, les autres étant nuls. On en déduit que $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$ et que W est irréductible.
Compte tenu de la relation du III.3.a, on en déduit que $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$ et donc que W est irréductible.

IV.2. Comme $\gamma' \mapsto \gamma\gamma'$ est une permutation de Γ et que $\gamma\gamma' = \gamma'$ ssi $\gamma = 1_\Gamma$ on a

$$\chi_{\mathtt{reg}}(\gamma) = \begin{cases} \#\Gamma & \text{si } \gamma = 1_\Gamma \\ 0 & \text{si } \gamma \neq 1_\Gamma \end{cases}$$

On en déduit que $\langle \chi_{\mathtt{reg}}, \chi \rangle = \dfrac{1}{\#\Gamma}.\#\Gamma.\chi(1_\Gamma) = \dim \chi$ (cf I.2).

IV.3. On utilise ici le résultat de la question III.3.a : $\langle \chi_E, \chi_i \rangle = d_i \langle \chi_i, \chi_i \rangle$ et en prenant $E = K^\Gamma$ on obtient $d_i = \dfrac{\dim \chi_i}{\langle \chi_i, \chi_i \rangle}$ vu la question précédente (IV.2).

Enfin, la dernière relation s'obtient en reprenant l'égalité trouvée au III.3.a

$$\langle \chi_{\mathtt{reg}}, \chi_{\mathtt{reg}} \rangle = \sum_{i=1}^{s} d_i^2 \langle \chi_i, \chi_i \rangle$$

et comme $\langle \chi_{\mathtt{reg}}, \chi_{\mathtt{reg}} \rangle = \#\Gamma$ (cf II.2.b) on obtient

$$\#\Gamma = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\dim \chi_i}{\langle \chi_i, \chi_i \rangle} \right)^2 \langle \chi_i, \chi_i \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{s} \frac{(\dim \chi_i)^2}{\langle \chi_i, \chi_i \rangle}$$