EXERCICE 63 algèbre

Énoncé exercice 63

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.
3. Justifier que la matrice A est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A ?

Corrigé exercice 63

1. C'est un déterminant tri-diagonal, il suffit de développer selon la première ligne.

$$D_{n+2} = 2D_{n+1} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & & & (0) \\ 0 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & (0) & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

   Puis, en développant le second déterminant obtenu selon la première colonne, on obtient $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

2. (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$.
   Donc, son terme général est de la forme $D_n = (\lambda n + \mu) \times 1^n$.
   Puisque $D_1 = 2$ et $D_2 = 3$, on obtient $D_n = n + 1$.

3. La matrice A_n est symétrique réelle donc diagonalisable.
   $D_n = n + 1 \neq 0$ donc A_n est inversible.
   Donc l'endomorphisme canoniquement associé à A_n est injectif.
   On en déduit que 0 n'est pas valeur propre de A_n.