

RÉDUCTION ET POLYNÔMES

- Si on dispose d'un polynôme annulateur, les valeurs propres sont à chercher parmi les racines de celui-ci.
- Les valeurs propres sont **les** racines du polynôme caractéristique et aussi celles du polynôme minimal. Mais attention, pour un autre polynôme annulateur, ce sont seulement **des** racines.
- Lorsqu'une matrice se présente par blocs, on aura souvent intérêt à chercher les vecteurs propres par blocs : pour résoudre $AX = \lambda X$ où $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$, on écrira $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

Pour utiliser les polynômes annulateurs, savoir exprimer simplement les blocs diagonaux d'un polynôme en une matrice diagonale ou triangulaire par blocs (c'est similaire au cas diagonal/triangulaire).

- Diagonalisabilité :
 - Avoir n valeurs propres distinctes en dimension n suffit.
 - On peut ajouter les dimensions des sous-espaces propres (multiplicités géométriques) et comparer à la dimension de l'espace.
 - Trouver un polynôme annulateur scindé simple est nécessaire et suffisant.
 - Si on a une décomposition en sous-espaces stable, u est diagonalisable si et seulement si l'est sur chaque sous-espace.
 - Lorsque A se présente par blocs, on peut aussi voir sur les blocs comment se traduit $P(A)$ pour un polynôme P .
 - Lorsque le polynôme caractéristique est scindé, il y a diagonalisabilité si et seulement si les dimensions de chaque sous-espace propre sont égales aux multiplicités des valeurs propres.
 - On verra plus tard qu'une matrice symétrique **réelle** est automatiquement diagonalisable.
 - Savoir diagonaliser complètement en petite dimension, et savoir en déduire puissance de matrice, terme général de suites récurrentes, commutant ou sous-espaces stables par une matrice.
 - Le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux sont d'un usage fréquent (et ils vont souvent ensemble).
 - On trouve à l'oral des exercices du type : résoudre $P(X) = M$, où M est une matrice donnée, P un polynôme, X une matrice inconnue. Par exemple : Résoudre $X^2 + X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Il n'y a pas **une** méthode pour aborder ce problème, mais quand même... il est important de remarquer que si $P(X) = M$, alors X et M commutent. Et donc X laisse stables l'image, le noyau, les sous-espaces propres de M . Ce qui délimite pas mal les choses.
- Comme toujours, il peut y avoir d'autres méthodes : les connaissances au programme sur les matrices nilpotentes permettent parfois de conclure très vite (exemple classique : résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).
- Signalons enfin (voir plus tard) qu'une solution de l'équation $\exp(X) = M$ commute nécessairement avec M .

Sauf mention contraire, \mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} , et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

- 1** Si $A^2 - 3A + 2I_n = 0$, calculer les puissances de A , vérifier que A est inversible et que exprimer A^{-1} en fonction de A et I_n et vérifier que l'expression des puissances est valable pour des puissances négatives.

- 2** Résoudre $y^{(4)} = y$ dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, en posant u l'opérateur de dérivation.

- 3** Déterminer les sous-espaces stables par l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4 CCINP 65

5 CCINP 91

6 CCINP 88

7 CCINP 93

2. Un grand classique

8 Diagonalisation simultanée

- Soit u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, diagonalisables. Démontrer qu'il y a équivalence entre
 - u et v sont simultanément diagonalisables (c'est-à-dire diagonalisables dans une même base, soit encore il existe une base formée de vecteurs propres à la fois pour u et pour v).
 - u et v commutent.
 - Chaque sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.
 Reformuler (i) \iff (ii) en termes de matrices.
- Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Démontrer qu'il existe une base dans laquelle les matrices de tous ces endomorphismes sont diagonales (on pourra commencer par une famille finie).

3. Polynômes annulateurs

- 9** Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- Exprimer M^2 en fonction de M et I_3 . La matrice M est-elle diagonalisable ?
- Déterminer sans calcul le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de M .
- Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 10** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 + A^T = I_n$. Démontrer que A est diagonalisable.

- 11** **Oral CCINP** Soit E une \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension ≥ 1 , $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$. Montrer que u est diagonalisable et décrire les sous-espaces de E stables par u .

12 Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$, $\text{tr } A = 3$ et A est non inversible.

13 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $\Phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ définie par $\Phi_A(M) = AM$. Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

14 Sur $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, on considère l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$.

1. Si $f, g \in E$, rappeler la formule de Leibniz exprimant $D^m(fg)$ en fonction des dérivées successives de f et de g .
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. Montrer que $e_\lambda D^m(e_{-\lambda} f) = (D - \lambda \text{id}_E)^m(f)$.
3. En déduire $\text{Ker}(D - \lambda \text{id}_E)^m$.
4. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé. En utilisant le lemme de décomposition des noyaux, montrer que les solutions de $a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0$ sont exactement les combinaisons linéaires de fonctions de la forme $t \mapsto t^k e^{\lambda t}$ où λ est une racine de P et k est un entier naturel inférieur ou égal à la multiplicité de λ en tant que racine de P .

15 **Oral Mines** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

Montrer que A est triangulaire supérieure si, et seulement si, A^k l'est pour tout $k \geq 2$.
Donner un contre-exemple dans le cas où l'on ne suppose plus la matrice A inversible.

16 Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice ayant pour polynôme minimal $X^2 + 1$?

17 **Oral CCINP** Soient $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $B = A^p$.

Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, B l'est.

18 **Oral CCINP** Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension quelconque. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de u vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
Montrer que $\text{Ker } u^2 = \text{Ker } u$, $\text{Im } u^2 = \text{Im } u$ puis que l'image et le noyau de u sont supplémentaires dans E .

19 **Oral CCINP** Soient $n \geq 2, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$f(M) = \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A$$

où tr désigne la forme linéaire trace.

Étudier la réduction de l'endomorphisme f et préciser la dimension de ses sous-espaces propres.

20 Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. La matrice $(a_i a_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est-elle diagonalisable ?

21 **Oral Centrale** Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^5 = M^2$ et $\text{tr } M = n$

22 Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^p = 0_n$.

1. Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.
2. On pose $H = \{I_n + P(B), P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}$. Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$.

4. Réduction par blocs

23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 3B & B \\ -2B & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable sur \mathbb{R} et la diagonaliser.
2. En déduire que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que si B est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

24 Soit A, B matrices carrées d'ordre p et q respectivement. On définit par blocs la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est diagonalisable (respectivement trigonalisable) si et seulement si A et B le sont.
2. Soit C à p lignes et q colonnes, $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

On suppose que A et B sont diagonalisables et n'ont aucune valeur propre commune.
Montrer que N est diagonalisable et semblable à M .

25 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit diagonalisable.

26 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(B)$ en fonction de A , $P(A)$ et $P'(A)$.
3. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.
4. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.