

Sujet Centrale : Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

Notations et définitions

Dans tout le problème, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans \mathbb{K} et, pour $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la \mathbb{K} -algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans \mathbb{K} . La matrice unité est notée I_n et on désigne par $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note A^T la transposée de la matrice A , $\text{rg}(A)$ son rang, $\text{tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, π_A son polynôme minimal et $\text{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans \mathbb{K} .

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E . On note f un endomorphisme de E .

On note $f^0 = \text{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme

$$a_0\text{Id}_E + a_1f + \dots + a_mf^m.$$

On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\text{rg}(f)$, $\text{tr}(f)$, χ_f , π_f et $\text{sp}(f)$.

Enfin, on dit que f est cyclique si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

I Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A –

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Montrer que M et M^T ont même spectre.
- Montrer que M^T est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

I.B – Matrices compagnons

3. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & & & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q .

- Soit λ une valeur propre de C_Q^T . Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

I.C – Endomorphismes cycliques

- Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q , où Q est un polynôme unitaire de degré n .
- Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur \mathbb{K} et a toutes ses racines simples.
- Montrer que si f est cyclique, alors $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$ et le polynôme minimal de f est de degré n .

I.D – Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

- Soit x un vecteur non nul de E . Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0x + \alpha_1f(x) + \dots + \alpha_{p-1}f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$$

- Justifier que $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est stable par f .

- Montrer que $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \dots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f .

- Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

II Etude des endomorphismes cycliques

II.A – Endomorphismes cycliques nilpotents

Dans cette sous-partie, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent de E . On note r le plus petit entier naturel tel que $f^r = 0$.

- Montrer que f est cyclique si et seulement si $r = n$. Préciser alors la matrice compagnon.

Dans la suite de cette partie, on ne suppose plus f nilpotent, mais on suppose que $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est cyclique.

II.B –

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On factorise le polynôme caractéristique de f sous la forme $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ où les λ_k sont les p valeurs propres deux à deux distinctes de f et les m_k de \mathbb{N}^* leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose $F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k})$.

13. Montrer que les sous-espaces vectoriels F_k sont stables et que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note φ_k l'endomorphisme induit par $f - \lambda_k \text{Id}$ sur le sous-espace vectoriel F_k ,

$$\varphi_k : \begin{cases} F_k \rightarrow F_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x \end{cases}$$

14. Justifier que φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k .

On note ν_k le plus petit entier naturel tel que $\varphi_k^{\nu_k} = 0$.

15. Pourquoi a-t-on $\nu_k \leq \dim(F_k)$?

16. Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $\nu_k = m_k$.

17. Expliciter la dimension de F_k pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, puis en déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, ces blocs

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

appartenant à $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ et étant de la forme

On pose $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \dots + u_{m_1+\dots+m_{p-1}+1}$.

18. Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(f)(x_0) = 0$.

19. Justifier que f est cyclique.

II.C –

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

20. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $A = QBQ^{-1}$ avec $Q \in GL_n(\mathbb{C})$. On écrit $Q = Q_1 + iQ_2$ avec Q_1 et Q_2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid Q_1 + \lambda Q_2 \in GL_n(\mathbb{R})\}$ est non vide. En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

21. Montrer que f est cyclique.

Conclure.

III Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

On appelle commutant de f l'ensemble $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

22. Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

III.A – Commutant d'un endomorphisme cyclique

On suppose que f est cyclique et on choisit un vecteur x_0 dans E tel que

$$(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$$

est une base de E .

Soit $g \in C(f)$, un endomorphisme qui commute avec f .

23. Justifier l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ de \mathbb{K} tels que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$.

24. Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.

25. Établir que $g \in C(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

III.B – Décomposition de Frobenius

On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, ces blocs étant des matrices compagnons.

26. Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels F_1, \dots, F_r de E est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces F_i contient tous les autres.

On note d le degré de π_f .

27. Justifier l'existence d'un vecteur x_1 de E tel que $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1))$ est libre.

Pour tout x non nul de E , on pourra remarquer que $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un polynôme unitaire $\pi_{f,x}$ diviseur de π_f et considérer les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(\pi_{f,x}(f))$.

On pose $e_1 = x_1$, $e_2 = f(x_1)$, ..., $e_d = f^{d-1}(x_1)$ et $E_1 = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_d)$.

28. Montrer que E_1 est stable par f et que $E_1 = \{P(f)(x_1) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

On note ψ_1 l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace vectoriel E_1 , $\psi_1 : \begin{cases} E_1 \rightarrow E_1 \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

29. Justifier que ψ_1 est cyclique.

On complète, si nécessaire, (e_1, e_2, \dots, e_d) en une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de E . Soit Φ la d -ième forme coordonnée qui à tout vecteur x de E associe sa coordonnée suivant e_d .

On note $F = \{x \in E \mid \forall i \in \mathbb{N}, \Phi(f^i(x)) = 0\}$.

30. Montrer que F est stable par f et que E_1 et F sont en somme directe.

Soit Ψ l'application linéaire de E dans \mathbb{K}^d définie, pour tout $x \in E$, par

$$\Psi(x) = (\Phi(f^i(x)))_{0 \leq i \leq d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x)), \dots, \Phi(f^{d-1}(x)))$$

31. Montrer que Ψ induit un isomorphisme entre E_1 et \mathbb{K}^d .
32. Montrer que $E = E_1 \oplus F$.
33. En déduire qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E , notés E_1, \dots, E_r , tous stables par f , tels que :
 - $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$;
 - pour tout $1 \leq i \leq r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
 - si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i , alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq r-1$.

III.C – Commutant d'un endomorphisme quelconque

34. Montrer que la dimension de $C(f)$ est supérieure ou égale à n .
35. On suppose que f est un endomorphisme tel que l'algèbre $C(f)$ est égale à $\mathbb{K}[f]$.
Montrer que f est cyclique.

IV p -Cycles

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit que f est un « p -cycle » si, et seulement si, il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ soit génératrice de E et $f^p(x_0) = x_0$.

IV.A –

Dans cette partie, f désigne un p -cycle.

36. Montrer que $f^p = \text{Id}$.
37. Soit $\mathcal{E} = \{k \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ est une famille libre}\}$.
Montrer que \mathcal{E} admet un maximum noté m .
38. Montrer que : $\forall k \geq m, f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$. En déduire que f est cyclique. Déterminer le nombre de valeurs propres distinctes de f .

IV.B –

39. Dans cette question, f désigne un n -cycle. Déterminer C , matrice compagnon de f .

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et, pour $k \in \mathbb{Z}$, $U_k = \begin{pmatrix} \bar{\omega}^k \\ \bar{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \bar{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $C U_k$.

40. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $M = (m_{k,\ell})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq n}}$, avec $m_{k,\ell} = \bar{\omega}^{k\ell}$.

Calculer $M \bar{M}$; en déduire que $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et calculer M^{-1} .

41. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A .