DL 5 – Sujet CCINP

L'objectif du problème est d'étudier des conditions pour que deux matrices admettent un ***vecteur propre commun*** *et d'en déduire une* ***forme normale pour des vecteurs propres.***
Les parties I et III traitent chacune de cas particuliers en dimension 3 et n. Elles sont indépendantes l'une de l'autre. La partie II aborde la situation générale en faisant apparaître une condition nécessaire et certaines autres conditions suffisantes à l'existence d'un vecteur propre commun.
Les parties II, III et IV sont, pour une grande part, indépendantes les unes des autres.

Il est demandé, lorsqu'un raisonnement utilise un résultat obtenu précédemment dans le problème, d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Notations et définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Notons $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$,

$\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$,
0_n la matrice nulle d'ordre n
et I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note :

$$\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tel que } MX = 0\},$$
$$\mathrm{Im}(M) = \{MX,\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\},$$
$\mathrm{Sp}(M)$ le spectre de M,
$$E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$$
et $$\mathrm{Im}_\lambda(M) = \mathrm{Im}(M - \lambda I_n).$$

Définitions

- Soient $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\mathbf{e} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
  on dit que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à A et B si :
  i) $\mathbf{e} \neq 0$;
  ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A\mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}$;
  iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $B\mathbf{e} = \mu \mathbf{e}$;

  On définit $[A,B] \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par la formule : $[A,B] = AB - BA$.

- Soient f et g, deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel E et $\mathbf{e} \in E$;
  on dit de même que $\mathbf{e}$ est un **vecteur propre commun** à f et g si :
  i) $\mathbf{e} \neq 0$;
  ii) il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e}$;
  iii) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $g(\mathbf{e}) = \mu \mathbf{e}$;

  On définit l'endomorphisme $[f,g]$ de E par la formule : $[f,g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I : ÉTUDE DANS UN CAS PARTICULIER

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ où $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note aussi $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

I.1.

I.1.a. Déterminer le spectre de A.
I.1.b. Vérifier que la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
I.1.c. A est-elle diagonalisable ?
I.1.d. Montrer qu'aucun des éléments de $\mathscr{F}$ n'est un vecteur propre commun à A et B.

I.2.

I.2.a. Déterminer le spectre de B.
I.2.b. Montrer que $\mathrm{Im}_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_4)$ et que $\dim(E_2(B)) = 2$.
I.2.c. B est-elle diagonalisable ?

I.3.

I.3.a. Montrer que $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_5)$.
I.3.b. Déterminer tous les vecteurs propres communs à A et B.

I.4.

I.4.a. Vérifier que $[A,B] = C$.
I.4.b. Montrer que C est semblable à la matrice D et déterminer le rang de C.

Partie II : CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

II.1. Dans cette question, on suppose que $\mathbf{e}$ est un vecteur propre commun à A et B.
II.1.a. Montrer que $\mathbf{e} \in \mathrm{Ker}([A,B])$.
II.1.b. Vérifier que $\mathrm{rg}([A,B]) < n$.

Dans toute la suite de cette partie II, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On dit que A et B vérifient la **propriété $\mathscr{H}$** s'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que :

$$E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}([A,B]).$$

II.2. Montrer que si $[A,B] = 0_n$, alors A et B vérifient la propriété $\mathscr{H}$.
II.3. Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la propriété $\mathscr{H}$.
II.3.a. Pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on pose $\psi(X) = BX$. Montrer que ψ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.
II.3.b. En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à A et B.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}_k$ **la propriété suivante** :

pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension k et pour tout couple d'endomorphismes (φ, ψ) de E tels que $\mathrm{rg}([\varphi, \psi]) \leqslant 1$, il existe un vecteur propre commun à φ et ψ.

II.4. Vérifier la propriété $\mathscr{P}_1$.
II.5. Dans cette question, on suppose que $\mathscr{P}_k$ **est vérifiée pour tout entier** $k \in [\![1, n-1]\!]$ et que A et B **ne vérifient pas la propriété $\mathscr{H}$.**

On note $C = [A,B]$, on suppose que $\mathrm{rg}(C) = 1$ et on considère $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.

II.5.a. Justifier l'existence de $\mathbf{u} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$ et $C\mathbf{u} \neq 0$.

II.5.b. Vérifier que $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}(\mathbf{v})$ où $\mathbf{v} = C\mathbf{u}$.

II.5.c. Montrer que $\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$.

II.5.d. Établir les inégalités suivantes : $1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \leqslant n-1$.

Pour tout $X \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$, on pose $\varphi(X) = AX$ et $\psi(X) = BX$.

II.5.e. Montrer que $[A, A - \lambda I_n] = 0_n$ et $[B, A - \lambda I_n] = -C$.
En déduire que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.

II.5.f. Montrer l'existence d'un vecteur propre commun à φ et ψ ; en déduire qu'il en est de même pour A et B.

II.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Partie III : ÉTUDE D'UN AUTRE CAS PARTICULIER

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour $P \in E$, on désigne par P' le polynôme dérivé de P.

Pour tout polynôme P de E, on pose $f(P) = P'$ et $g(P) = X^{2n} P\left(\frac{1}{X}\right)$.

III.1. Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$. Montrer que $g(P) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$.

III.2. Montrer que f et g définissent des endomorphismes de E.

III.3.

III.3.a. Vérifier que si P est un vecteur propre de g, alors $\deg(P) \geqslant n$.

III.3.b. Montrer que X^n est un vecteur propre de g.

Soit $i \in [\![1, 2n]\!]$. f^i correspond à la composée $f \circ f \circ \cdots \circ f$ où f est prise i fois.

III.4.

III.4.a. Vérifier que $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]$.

III.4.b. Montrer que $\mathrm{Sp}(f^i) = \{0\}$.

III.5. Montrer que f^i et g possèdent un vecteur propre commun si et seulement si $i \geqslant n+1$.

$\mathscr{B}_c$ désigne la base canonique de E définie par : $\mathscr{B}_c = (1, X, \ldots, X^{2n})$.
On note A_n la matrice de f dans la base $\mathscr{B}_c$ et B_n celle de g dans la même base.

III.6. Déterminer A_n et B_n.

III.7. Dans cette question, on suppose que $n = 1$.

III.7.a. Montrer que $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire l'expression de $(A_1)^2$ et $(A_1)^3$.

III.7.b. Déterminer le rang de $[(A_1)^i, B_1]$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

III.7.c. En déduire que la condition nécessaire de la question **II.1.b** n'est pas suffisante et que la condition suffisante de la question **II.6** n'est pas nécessaire.

Partie IV : FORME NORMALE POUR UN VECTEUR PROPRE

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On note $\mathscr{N} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \exists i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } x_i = 0 \right\}$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et X un vecteur propre de A.

On dit que X est **sous forme normale** si :

- $X \in \mathscr{N}$

ou

- il existe $\lambda' \in \mathrm{Sp}(A)$ et il existe $U \in \mathscr{N}$ tel que $X = (A - \lambda' I_n)U$.

IV.1. Dans cette question, on suppose que A possède une valeur propre λ telle que $\dim(E_\lambda(A)) \geqslant 2$.
Montrer que A admet un vecteur propre sous forme normale associé à la valeur propre λ.

On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des **matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ antisymétriques,** c'est-à-dire telles que $M^\top = -M$.
Pour tout $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\varphi(M) = AM + MA^\top$ et $\psi(M) = AMA^\top$.

IV.2.

IV.2.a. Montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{0_n\}$.

IV.2.b. Montrer que les colonnes d'une matrice $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$ sont des éléments de $\mathscr{N}$.

IV.2.c. Montrer que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\mathscr{A}_n(\mathbb{C})$.

IV.2.d. Vérifier que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

IV.3. Dans cette question, on suppose que A possède au moins deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2.

On considère X_1 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 et X_2 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2.

On note $B = X_1 X_2^\top - X_2 X_1^\top$.

IV.3.a. Montrer que B vérifie chacune des propriétés suivantes :

- **i)** $B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$;
- **ii)** $B \neq 0_n$;
- **iii)** $AB + BA^\top = (\lambda_1 + \lambda_2)B$;
- **iv)** $ABA^\top = (\lambda_1 \lambda_2)B$.

IV.3.b. En déduire que $(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n)B = 0_n$.

IV.3.c. Dans cette question, on suppose que $(A - \lambda_2 I_n)B = 0_n$. Montrer qu'au moins l'une des colonnes de B est un vecteur propre de A sous forme normale.

IV.3.d. Dans cette question, on suppose que $(A - \lambda_2 I_n)B \neq 0_n$. Montrer que A possède un vecteur propre sous forme normale.

IV.4. Dans cette question, on suppose que A ne possède qu'une seule valeur propre λ.

IV.4.a. Montrer l'existence d'une matrice $B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$ non nulle vérifiant chacune des propriétés suivantes :

- **i)** il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que : $AB + BA^\top = \alpha B$;
- **ii)** il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que : $ABA^\top = \beta B$.

IV.4.b. Vérifier que $(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = 0_n$.

IV.4.c. Montrer qu'il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = 0_n$.

IV.4.d. Dans cette question, on suppose que $(A - \delta I_n)B = 0_n$. Montrer que A possède un vecteur propre sous forme normale.

IV.4.e. Dans cette question, on suppose que $(A - \delta I_n)B \neq 0_n$ et $\delta = \lambda$. Montrer que A possède un vecteur propre sous forme normale.

IV.4.f. Dans cette question, on suppose que $(A - \delta I_n)B \neq 0_n$ et $\delta \neq \lambda$. Montrer que $A - \delta I_n$ est une matrice inversible et en déduire que $(A - \gamma I_n)B = 0$.

IV.4.g. Que conclure ?

Fin de l'énoncé