

EXERCICE 1

1) Si λ est vecteur propre de u et x un vecteur propre (non nul) associé, une itération immédiate montre que pour tout entier k on a $u^k(x) = \lambda^k x$ et donc que $P(u)(x) = P(\lambda)x$ pour tout polynôme P . Comme x est non nul, il en découle que $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$. $\square$

2) Soit λ une valeur propre de u , x un vecteur propre (non nul) associé et P un polynôme annulateur de u . Alors $P(u)(x) = 0$ mais également $P(u)(x) = P(\lambda)x$ d'après la question précédente. Donc $P(\lambda)x = 0$ soit $P(\lambda) = 0$ puisque x est non nul. Ainsi les valeurs propres de u sont à rechercher parmi les racines de P . $\square$

L'inclusion peut être stricte comme le montre l'exemple de l'identité annulée par le polynome $X^2 - 1$. $\square$

3) $X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X^2 + 1)$ donc la seule valeur propre possible de u est 1 puisque E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Comme la dimension est impaire, le polynôme caractéristique est de degré impair donc admet au moins une racine réelle par le théorème des valeurs intermédiaires.

En conclusion u admet une et une seule valeur propre : 1. $\square$

De manière plus précise (en passant sur $\mathbb{C}$), si i est valeur propre de multiplicité p alors $-i$ est également valeur propre avec le même ordre de multiplicité car le polynôme caractéristique est à coefficients réels. Comme la dimension est impaire, 1 est nécessairement valeur propre avec un ordre de multiplicité impair. Finalement le spectre complexe est de la forme $(1, \dots, 1, i, \dots, i, -i, \dots, -i)$ où 1 figure un nombre impair de fois et i et $-i$ le même nombre de fois éventuellement nul. $\square$

EXERCICE 2

1) $u = e_1 - 2e_3$ appartient au plan Π . Or w est orthogonal à Π . Donc si $v = w \wedge u = -6e_1 + 5e_2 - 3e_3$ alors (u, v) est bien base de Π et (u, v, w) est une base orthogonale de E . $\square$

2) On a évidemment $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\square$

3) La base (u', v', w') avec $u' = \frac{1}{\sqrt{5}}u$, $v' = \frac{1}{\sqrt{70}}v$ et $w' = \frac{1}{\sqrt{14}}w$ est orthonormale et la matrice de s dans cette base est encore évidemment S' . En notant P la matrice de passage de la base canonique à cette base, c'est à dire la matrice dont les colonnes sont les composantes de u' , v' et w' dans la base canonique, on a $S = P^{-1}S'P = {}^tPS'P$ puisque P est orthogonale. On évite ainsi tout calcul d'inverse de matrice.

On trouve $S = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ $\square$

Remarque : On obtient plus rapidement encore cette matrice en notant que $s(x) = x - 2(w'|x)w' = x - \frac{1}{7}(w|x)w$ ce qui permet un calcul instantané des colonnes de S ! $\square$

PROBLÈME : RÉSULTANT DE DEUX POLYNÔMES.

Partie I : Définition et propriétés.

1) Cas où u est bijective.

(a) Commençons par remarquer, par considération des degrés, que u est bien une application de E dans F .

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $((A, B), (C, D)) \in E^2$. On a :

$$\begin{aligned} u(\lambda(A, B) + \mu(C, D)) &= u(\lambda A + \mu C, \lambda B + \mu D) = P(\lambda A + \mu C) + Q(\lambda B + \mu D) = \lambda(PA + QB) + \mu(PC + QD) \\ &= \lambda u(A, B) + \mu u(C, D) \quad \square \end{aligned}$$

(b) Si u est bijective il existe en particulier $(A, B) \in E$ tel que $u(A, B) = 1$ ce qui prouve que P et Q sont premiers entre eux par le théorème de Bezout. $\square$

(c) Supposons P et Q premiers entre eux et soit $(A, B) \in \text{Ker } u$.

On a $PA = -QB$ donc Q divise A par le théorème de Gauss (car Q divise PA et est premier avec P).

Or Q est de degré q et A de degré au plus $q - 1$ (avec la convention usuelle que le degré du polynôme nul est égal à $-\infty$). Il en résulte que A est le polynôme nul.

Il reste alors $QB = 0$ donc $B = 0$ car P est non nul.

Ainsi $\text{Ker } u$ est réduit au polynôme nul et u est bijective en tant qu'application linéaire injective entre deux espaces de même dimension finie $p + q$. $\square$

2) Matrice de u

(a) L'image de la base $\mathcal{B}$ par u est la famille $(P, XP, \dots, X^{q-1}P, Q, XQ, \dots, X^{p-1}Q)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}'$ de F est la matrice $M_{P,Q}$ associée à $\text{Res}(P, Q)$. $\square$

(b) Ainsi $\det u = \text{Res}(P, Q)$ et compte tenu de la question 1) :

$\text{Res}(P, Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux. $\square$

3) Racines multiples.

(a) P admet une racine multiple si et seulement si P et P' admettent une racine commune donc si et seulement si P et P' ne sont pas premiers entre eux donc si et seulement si $\text{Res}(P, P') = 0$. $\square$

(b) La condition est $\text{Res}(b + aX + X^3, a + 3X^2) = 0$.

En effectuant les opérations de Gauss $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a}{3}L_4$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a}{3}L_5$ on ramène ce déterminant 5×5 à un déterminant triangulaire par blocs donc au calcul d'un déterminant d'ordre 3 et d'un déterminant d'ordre 3.

On trouve que la condition est $4a^3 + 27b^2 = 0$. $\square$

Partie II : Applications.

4) Équation de Bezout.

(a) L'énoncé suggère (impose ?) de vérifier que $\text{Res}(P, Q) \neq 0$. Or il s'agit là d'un déterminant 7×7 sans rien de particulier ! Un calcul stupide montre que ce déterminant vaut 1. $\square$

Il est beaucoup plus rapide de noter que $P = (X + 1)Q + X^2$ ce qui prouve que la seule racine commune possible de P et Q est 0 qui ne convient pas ! $\square$

(b) Comme u est bijective, un tel couple existe et est unique : il s'agit de $u^{-1}(1)$.

Donc $A_0 = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $B_0 = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ convient (Cf question 2.a) si et seulement si, en notant $C = {}^t(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3)$ et $D = {}^t(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, on a $\text{Res}(P, Q)C = D$.

Cela conduit à résoudre un système linéaire de 7 équations à 7 inconnues. La méthode du pivot de Gauss conduit à la solution $A_0 = 1 - X - X^2$ et $B_0 = X + 2X^2 + X^3$. $\square$

Là encore il est plus rapide d'appliquer l'algorithme d'Euclide :

En notant $R_0 = X^2$, $R_1 = -X + 1$, $Q_0 = X + 1$, $Q_1 = X$ et $Q_2 = -X - 1$ on obtient (algorithme d'Euclide):

$$\begin{cases} P = QQ_0 + R_0 \\ Q = R_0Q_1 + R_1 \end{cases} \text{ donc } 1 = -R_1Q_2 + R_0 = -(Q - R_0Q_1)Q_2 + R_0 = -(Q + (QQ_0 - P)Q_1)Q_2 - QQ_0 + P \text{ donc } \begin{cases} R_0 = R_1Q_2 + 1 \end{cases}$$

$$(Q_1Q_2 + 1)P - (Q_0 + Q_2 + Q_0Q_1Q_2)Q = 1 \text{ soit } (1 - X - X^2)P + (X + 2X^2 + X^3)Q = 1. \quad \square$$

(c) • Si (A, B) vérifie $PA + QB = 1$ alors $PA + QB = PA_0 + QB_0$ donc $P(A - A_0) = -Q(B - B_0)$ (1).

Ainsi Q divise $(A - A_0)P$ donc $A - A_0$ d'après le théorème de Gauss puisque P et Q sont premiers entre eux. Donc il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = A_0 + QR$. (1) s'écrit alors $PR = -(B - B_0)$ donc $B = B_0 - PR$.

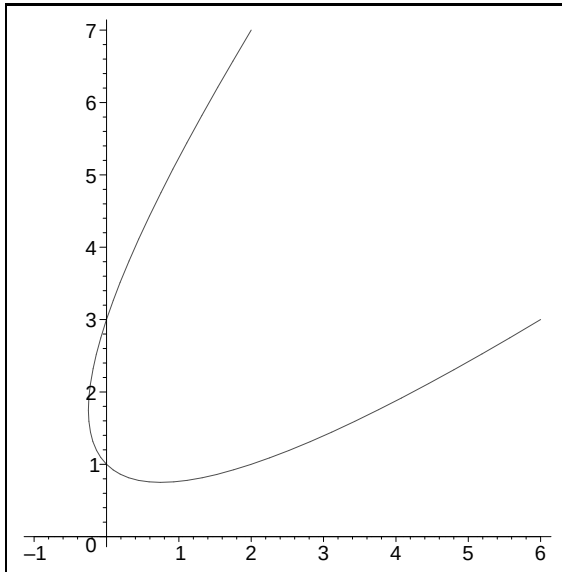
ainsi si (A, B) est solution, il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = A_0 + QR$ et $B = B_0 - PR$.

• Réciproquement tout couple de cette forme convient clairement.

• En conclusion les couples solution sont tous les couples de la forme $(A_0 + QR, B_0 - PR)$ avec $R \in \mathbb{C}[X]$. $\square$

5) Équation d'une courbe.

(a)



- Les variations de x et y sont immédiates.
Tangente verticale en $(-\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$ obtenue pour $t = -\frac{1}{2}$.
Tangente horizontale en $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ obtenue pour $t = \frac{1}{2}$.
- Lorsque $t \rightarrow \pm\infty$, le développement vectoriel
 $\overrightarrow{OM}(t) = t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \overrightarrow{O}(1)$
montre que la courbe présente une branche parabolique dans la direction de la première bissectrice.
Ce que l'on peut également retrouver en notant que $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow 1$ puis que $y(t) - x(t) \rightarrow \infty$.

(b) $(M(x, y) \in \Gamma) \iff (\exists t \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \begin{cases} P(t) = x \\ Q(t) = y \end{cases}) \iff (A \text{ et } B \text{ ont une racine commune}) \iff (Res(A, B) = 0)$

Dans notre cas particulier $Res(A, B)$ est un déterminant d'ordre 4 et on obtient ainsi :

$$M(x, y) \in \Gamma \iff x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 3 = 0 \quad \square$$

- (c) La courbe Γ admet donc pour équation algébrique $(x-y)^2 - 4y + 3 = 0$ soit $X^2 - Y = 0$ en effectuant le changement de repère (non orthonormé) $\begin{cases} X = x - y \\ Y = 4y - 3 \end{cases}$. Il s'agit donc d'une parabole. $\square$

6) Nombre algébrique.

On peut très facilement réoudre cette question sans la notion de résultant :

$Q_{\sqrt{3}}(X) = (\sqrt{3} - X)^2 - 7 = X^2 - 2\sqrt{3}X - 4$ admet $\sqrt{3} \pm \sqrt{7}$ pour racines donc $(X^2 - 4)^2 = 12X^2$ soit $X^4 - 20X^2 + 16$ admet $\pm(\sqrt{3} \pm \sqrt{7})$ comme racines.

Comme on a 4 racines distinctes, on a bien toutes les racines. $\square$

FIN