Corrigé du CCP 2009 MP Maths II
A. ATTIOUI

PREMIER EXERCICE

1. Soit λ une valeur propre de u, alors il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$. D'où le résultat.

2. On suppose que P est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u.

(a) Soit λ une valeur propre de u, alors d'aprés 1., $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u) = 0$. Donc, $P(\lambda) = 0$, car 0 est la seule valeur propre de l'endomorphisme nul.

(b) On n'a pas nécessairement toute racine de P est une une valeur propre de u. Comme contre-exemple on prend $u = id_E$ et $P(X) = X(X-1)$. Alors, $P(u) = 0$ et $P(0) = 0$ mais 0 n'est pas une valeur propre de u.

3. Le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, annulateur de u et $P(X) = (X-1)(X^2+1)$. Alors, d'aprés 2.(a), $Spectre(u) \subset \{1\}$ car 1 est la seule racine réelle de P. D'autre part, le polynôme caractéristique χ_u de u est réel et de degré impair, car $deg(\chi_u) = dimE$, alors χ_u admet au moins une racine réelle λ. Par définition, $\lambda \in Spectre(u)$ alors $\lambda = 1$ et $Spectre(u) = \{1\}$. Noter que χ_u est un polynôme annulateur de u, d'aprés le théorème de Cayley Hamilton.

DEUXIÈME EXERCICE

1. Soit $(x, y, z) \in \Pi$, alors $(x, y, z) = (x, y, -2x - 3y) = x(1, 0, -2) + y(0, 1, -3)$. Donc, les vecteurs $u = e_1 - 2e_3$ et $v = e_2 - 3e_3$ forment une base de Π. Il est clair que le vecteur w est orthogonal à Π. Par conséquent, la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Tout vecteur de Π est invariant par s et le vecteur w est orthogonal à Π alors : $s(u) = u$, $s(v) = v$ et $s(w) = -w$. Par suite, la matrice de s dans la base (u, v, w) est $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Si P désigne la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (u, v, w) alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $S = PS'P^{-1}$ (Attention, la matrice P n'est pas orthogonale alors son inverse n'est pas sa transposée. Pour avoir une matrice P orthogonale, on doit choisir au départ le vecteur v tel que $(u|v) = 0$, ensuite il faut normaliser pour obtenir une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$). On trouve alors, aprés calcul, $S = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$. Noter qu'on possède déjà l'expression suivante de la symétrie orthogonale s : $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$, $s(x) = x - 2\dfrac{(x|w)}{(w|w)}w$.

PROBLÈME: RÉSULTANT DE DEUX POLYNÔMES

I. Définition et propriétés

1. Cas où u est bijective

(a) L'application u est bien définie car si $(A, B) \in E$, $deg(A) \leqslant q - 1$ et $deg(P) = p$ alors $deg(PA) \leqslant p + q - 1$ i.e $PA \in F$ de même $QB \in F$. Donc $u(A, B) \in F$. Par un calcul immédiat, $u((A_1, B_1) + \lambda(A_2, B_2)) = u(A_1, B_1) + \lambda u(A_2, B_2)$, $\forall\, ((A_1, B_1); (A_2, B_2); \lambda) \in E^2 \times \mathbb{C}$.

(b) Si l'application u est bijective, le polynôme constant 1 de F admet un antécédent unique $(A, B) \in E$ par u. Donc, $u(A, B) = PA + QB = 1$. D'aprés le théorème de Bézout, les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

(c) Soit $(A, B) \in Ker(u)$, alors $u(A, B) = PA + QB = 0$. Si les polynômes A, B ne sont pas nuls, quite à diviser par leur PGCD, on peut supposer qu'ils sont premiers entre eux. Mais, les polynômes P et Q sont premiers entre eux alors par le théorème de Gauss, P est associé à B et Q est associé à A car l'un divise l'autre et vise-versa. Par suite, $deg(A) = q$ et $deg(B) = p$, ceci est absurde avec le fait que $(A, B) \in E$, alors les polynômes A et B sont nuls. Donc, $Ker(u) = \{(0, 0)\}$. Les espaces vectoriels E et F ont même dimension et l'application linéaire u est injective alors elle est bijective.

2. Matrice de u

(a) Pour k de 0 à $q-1$ et h de 0 à $p-1$, $u(X^k, 0) = PX^k$ et $u(0, X^h) = QX^h$, alors le vecteur $u(X^k, 0)$ a pour composantes, dans la base B', $(\overbrace{0, \cdots, 0}^{k\ fois}, a_0, \cdots, a_p, \overbrace{0, \cdots, 0}^{(q-k-1)\ fois})$ qui repésente la $(k+1)^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de u. De même, le vecteur $u(0, X^h)$ a pour composantes, dans la base B', $(\overbrace{0, \cdots, 0}^{h\ fois}, b_0, \cdots, b_q, \overbrace{0 \cdots, 0}^{(p-h-1)\ fois})$ qui représente la $(q+h+1)^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de u. Donc, la matrice de u, dans les bases B et B', est $M_{P,Q}$.

(b) Par définition et d'aprés 2.(b), $R(P,Q)$ est le déterminent de la matrice $M_{P,Q}$ qui est la matrice de u. Donc, $R(P,Q) \neq 0$ ssi $M_{P,Q}$ est inversible ssi u est bijective ssi les polynômes P et Q sont premiers entre eux, d'aprés 1.

3. Racine multiple

(a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, on suppose que P est non nul (sinon, il n'y a rien à démontrer). Si P admet une racine multiple, alors P' admet la même racine. En d'autres termes P et P' ne sont pas premiers entre eux. D'aprés 2.(b), $R(P,P') = 0$.

(b) Le polynôme $P = b + aX + X^3$ admet une racine multiple ssi le résultant de P et $P' = a + 3X^2$ est nul.

$$R(P,P') = \begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 3 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}. \text{ Avec les opérations, } \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_5 \end{array}, \quad R(P,P') = \begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & a \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Aprés calcul, on trouve $R(P,P') = 27b^2 + 4a^3$. Donc, P admet une racine multiple ssi $27b^2 + 4a^3 = 0$.

II. Applications

4. Équation de Bézout. $P = 1 + X^3 + X^4$ et $Q = 1 - X + X^3$

(a) D'aprés 2.(b) de la première partie, les polynômes P et Q sont premiers entre eux ssi $R(P,Q) \neq 0$. On a affaire à un déterminent d'ordre 7. Aprés calcul, on trouve :

$$R(P,Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

(b) On considère $E = \mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_3[X]$, $F = \mathbb{C}_6[X]$ et l'application $u : E \to F$ définie par: $\forall\, (A,B) \in E$, $u(A,B) = PA + QB$. D'aprés la question précédente, les polynômes P et Q sont premiers entre eux. Alors, d'aprés I.2.(b), u est bijective. Donc, il existe un couple (A_0, B_0) de polynômes de E tel que $u(A_0, B_0) = PA_0 + QB_0 = 1$ i.e. $(A_0, B_0) = u^{-1}(1)$. En posant, $A_0 = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $B_0 = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$. Alors, matriciellement cette égalité devient: ${}^t(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3) = M_{P,Q}^{-1}\,{}^t(1,0,0,0,0,0) = {}^t(1,-1,-1,0,1,2,1)$. Ainsi, $A_0 = 1 - X - X^2$ et $B_0 = X + 2X^2 + X^3$.

(c) Soit (A,B) un couple de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que $PA + QB = 1$. Alors, $P(A - A_0) = Q(B_0 - B)$. Par suite, P divise $Q(B_0 - B)$ et puisque P et premier avec Q, par le théorème de Gauss, P divise $B_0 - B$. Il existe alors un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B_0 - B = PR$ et alors $A - A_0 = QR$. Donc, $(A,B) = (A_0 + QR, B_0 - PR)$ avec $R \in \mathbb{C}[X]$. Inversement, pour tout $R \in \mathbb{C}[X]$, le couple $(A,B) = (A_0 + QR, B_0 - PR)$ est clairement solution de l'équation $PA + QB = 1$.

5. Équation d'une courbe

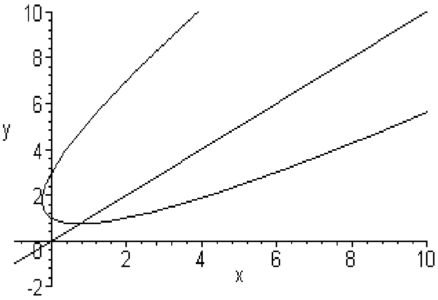
(a) Les applications $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont polynômiales, alors elles sont définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = 2t + 1$ et $y'(t) = 2t - 1$. Alors, Γ est une courbe régulière. D'où le tableau des variations:

t	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	2	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	$3/4$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	-2	$-$	0	$+$	
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$7/4$	$\searrow$	$3/4$	$\nearrow$	$+\infty$
$m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$		$+$	∞	$-$	0	$+$	

Tangentes: En $t = \frac{-1}{2}$, tangente verticale et la courbe à droite. En $t = \frac{1}{2}$, tangente horizontale au dessous de la courbe.

Branches infinies: En $\pm\infty$, la courbe Γ présente une branche infinie, $\frac{y(t)}{x(t)} \to 1$ et $y(t) - x(t) = -2t + 1 \to \pm\infty$, alors la première bissectrice est une direction de la branche parabolique. La courbe Γ recontre la droite $y = x$ au point de paramétre $t = \frac{1}{2}$, elle est au dessous de cette droite pour $t > \frac{1}{2}$ et au dessus pour $t < \frac{1}{2}$. La courbe Γ est construite avec l'instruction suivante de Maple:

```
plot( x,[t^2+t,t^2-t+1,t=-10..10] ,x=-1.. 10,y=-2..10);
```



(b) Soit $M(x, y)$ de la courbe $\begin{cases} x(t) = P(t) \\ y(t) = Q(t) \end{cases}$, Il exite $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = P(t_0) \\ y = Q(t_0) \end{cases}$. Alors, $A(t_0) = B(t_0) = 0$. Donc les polynôme A et B ont une racine commune. D'aprés la partie I, le résultant de $A(t) = -x + t + t^2$ et de $B = 1 - y - t + t^2$ est nul. Aprés calcul,

$$R(A, B) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 1-y & 0 \\ 1 & -x & -1 & 1-y \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 3$$

Donc, tout point $M(x, y)$ de la courbe Γ vérifie l'équation: $x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 3 = 0$.

(c) On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $q(x, y) = (x-y)^2$. Alors, la forme quadratique q est positive, dégénérée et de rang 1. Sa forme polaire est la forme bilinéaire $((x, y), (x', y')) \mapsto (x - y)(x' - y')$. Dans la base canonique $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, la matrice de q est alors $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont $\{0, 2\}$, un vecteur propre (unitaire) associé à 0 est $u = \frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}$ et celui associé à 2 est $v = \frac{-e_1+e_2}{\sqrt{2}}$. Donc, dans la base orthonormale direct $\{u, v\}$, la forme quadratique q ce réduit à $q(X, Y) = 2Y^2$. Ensuite, l'équation cartésienne de la courbe devient alors, $2Y^2 - 4\frac{X+Y}{\sqrt{2}} + 3 = 0$. Ainsi, $\left(Y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2}{\sqrt{2}}(X - \frac{1}{\sqrt{2}})$. Donc, la courbe est une parabole d'axe focal la droite (Ω, u) où Ω est le point de coordonnées $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

6. Nombre algébrique

En posant, $y = \sqrt{3} + \sqrt{7}$. On aura $(y - \sqrt{3})^2 = 7$, alors $\sqrt{3}$ est une racine commune de $P = X^2 - 3$ et de $Q_y = (y - X)^2 - 7$. D'aprés la partie I, le résultant de $P = -3 + X^2$ et de $Q_y = -7 + y^2 - 2yX + X^2$ est nul. Aprés calcul,

$$R(P, Q_y) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & -7+y^2 & 0 \\ 0 & -3 & -2y & -7+y^2 \\ 1 & 0 & 1 & -2y \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 16 - 20y^2 + y^4 = 0$$

Donc, $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ est une racine du polynôme de degré 4 à coefficient entiers: $X^4 - 20X^2 + 16$ (On dit que $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ est un nombre algèbrique). En posant $Y = y^2$, on trouve facilement les autres racines de l'équation $16 - 20y^2 + y^4 = 0$: $\sqrt{3} - \sqrt{7}$, $-\sqrt{3} + \sqrt{7}$ et $-\sqrt{3} - \sqrt{7}$ qui sont aussi des nombres algèbriques .