

1 Décomposition de Dunford

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $m \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Montrer l'existence d'un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tel que

- (i) $u = d + n$;
- (ii) d et n commutent ;
- (iii) d est diagonalisable et n est nilpotent.

Vérifier en outre que d et n sont des polynômes en u .

Solution de 1 : Décomposition de Dunford

- L'existence a été vue en cours : il suffit d'utiliser la supplémentarité des sous-espaces caractéristiques (le polynôme caractéristique étant scindé) : $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{m_i}$.

En posant d et n les endomorphismes stabilisant ces espaces et dont les endomorphismes induits sur $F_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{m_i}$ sont $d_i = \lambda_i \text{id}_{F_i}$ et $n_i = u_i - \lambda_i \text{id}_{F_i}$, autrement dit, si on décompose

$$x = \sum_{i=1}^p x_i \text{ dans } E = \bigoplus_{i=1}^p F_i,$$

$$d(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$$

et

$$n(x) = \sum_{i=1}^p (u(x_i) - \lambda_i x_i),$$

on obtient bien d diagonalisable (prendre une base adaptée à la décomposition) et n nilpotent d'indice au plus $\max_{1 \leq i \leq p} m_i$.

On a de plus bien $u = d + n$ et d et n commutent car c'est vrai sur chacun des F_i .

- On montre ensuite ces endomorphismes d et n sont des polynômes en u , ce qui aidera à prouver l'unicité (et redonne leur commutativité). C'est la partie la plus difficile.

En notant π_i la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} F_j$, on remarque que $d = \sum_{i=1}^p \lambda_i \pi_i$. Il suffit donc de montrer que les projections π_i sont des polynômes en u .

Il s'agit d'une conséquence de la démonstration du lemme de décomposition des noyaux appliqué à χ_u qui permet justement de prouver cette supplémentarité : si $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$ étant premier avec $Q_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{m_j}$, on a une relation de Bézout $P_i A_i + Q_i B_i = 1$ qui, évaluée en u donne $P_i(u) \circ A_i(u) + Q_i(u) \circ B_i(u) = \text{id}_E$ puis pour tout $x \in E$,

$$x = \underbrace{P_i(u) \circ A_i(u)(x)}_{\in \text{Ker } Q_i(u) = \bigoplus_{j \neq i} F_j} + \underbrace{Q_i(u) \circ B_i(u)(x)}_{\in F_i = \text{Ker } P_i(u)}$$

avec $\chi_u(u) = (P_i Q_i)(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ par le théorème de Cayley-Hamilton et $\text{Ker } Q_i(u) = \bigoplus_{j \neq i} F_j$ par lemme de décomposition des noyaux.

Alors, avec les mêmes notations que précédemment,

$$x_i = Q_i(u) \circ B_i(u)(x)$$

et $d(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (Q_i B_i)(u)(x)$ et

$$d = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i Q_i B_i \right)(u)$$

est bien un polynôme en u . Enfin, $n = u - d$ est aussi un polynôme en u .

- Si un autre couple (d', n') convient, d' commute avec n' donc avec $u = d' + n'$ donc avec tout polynôme en u et en particulier d . De même, n' commute avec n .

Or $d - d' = n' - n$, et par commutativité, d et d' sont codiagonalisables donc $d - d'$ est diagonalisable et $n' - n$ est nilpotent (deux exercices classiques).

Le seul endomorphisme diagonalisable et nilpotent étant l'endomorphisme nul, on conclut.