

Programme de colle – MPI

1. Réduction

Révision de la première partie du chapitre, à laquelle s’ajoute

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables	
Un endomorphisme d’un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s’il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire. Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Interprétation géométrique.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Interprétation en termes d’endomorphisme. La pratique de la trigonalisation n’est pas un objectif du programme. Traduction matricielle. Expression à l’aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d’un endomorphisme trigonalisable, d’une matrice trigonalisable.
Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	
Endomorphisme nilpotent d’un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s’il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. L’indice de nilpotence est majoré par la dimension de E .	Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique.
Polynômes d’un endomorphisme, d’une matrice carrée	
Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, morphisme d’algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l’idéal annulateur de u . Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$. Polynôme minimal d’un endomorphisme d’un espace de dimension finie, d’une matrice carrée. Si d est le degré du polynôme minimal de u , alors la famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. Si P annule u , toute valeur propre de u est racine de P . Les racines de π_u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u .	Traduction matricielle. Le polynôme minimal est unitaire. Notations $\pi_u, \mu_u, \pi_M, \mu_M$. Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Lemme de décomposition des noyaux	
Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P , alors :	
$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u)).$	
Polynômes annulateurs et réduction	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s’il annule un polynôme simplement scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé. Polynôme minimal d’un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d’un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable. Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s’il annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé.	Traduction matricielle. Traduction matricielle.
Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques	
Théorème de Cayley-Hamilton. Sous-espaces caractéristiques d’un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé ; E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u . Traduction matricielle de cette décomposition : similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.	La démonstration n’est pas exigible. Dimension d’un sous-espace caractéristique.

Semaine prochaine : Révisions sur les fonctions numériques.

2. Questions de cours

- Les questions de cours muni d’un astérisque * ne sont posables qu’aux trinômes 6, 7.
- Les membres de ces trinômes doivent savoir faire tous les exercices CCINP mais ne seront pas interrogés dessus.
- (i) u est diagonalisable si et seulement s’il est annulé par un polynôme simplement scindé.
- (ii) Si F est un sous-espace stable, relation entre polynôme caractéristique (révision), polynôme minimal, diagonalisabilité de l’endomorphisme induit par rapport à ceux de l’endomorphisme de départ.
Savoir en déduire les sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable.
- (iii) * Lemme de décomposition des noyaux (pour un produit de deux polynômes).
- (iv) * Caractérisation de la trigonalisabilité par l’existence d’un polynôme annulateur scindé.
- (v) * Théorème de Cayley-Hamilton.
- (vi) * Propriétés des sous-espaces caractéristiques : ce sont des sous-espaces stables, supplémentaires, de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante.
Matrice dans une base adaptée.
- (vii) * Exercice classique – Codiagonalisabilité
 - (a) Deux endomorphismes diagonalisables sont simultanément diagonalisables (ou codiagonalisables) si et seulement s’ils commutent.
 - (b) Expliquer comment cela se généralise à une famille $(u_i)_{i \in I}$ d’endomorphisme diagonalisables commutant deux à deux.
- (viii) CCINP 65, 88, 91, 93.

3. Exercices CCINP

- CCINP 65 : Soit u un endomorphisme d’un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l’ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
 - Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
 - (a) Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
(b) Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \implies (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$
 - Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A , puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A .
- CCINP 88 :
 - Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Prouver que si P annule u , alors toute valeur propre de u est racine de P .
 - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E, u(M) = M + \text{tr}(M)A$.
 - Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u .
 - u est-il diagonalisable ?
Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (une avec puis sans l’aide de la question a).

■ **CCINP 91** : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A . Vérifier que le polynôme caractéristique de A en est un polynôme annulateur.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n .

■ **CCINP 93** : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E .

1. Montrer que $\text{Im } u \oplus \text{Ker } u = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
(b) En déduire que $\text{Im } u = \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif.
Déterminer les valeurs propres de u . Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.