# Programme de colle – MPI

## 1. Groupe symétrique

Révision du programme de MP2I : voir programme officiel page suivante.
On s'intéresse en particulier aux orbites d'une permutation, à son ordre, au groupe alterné.

## 2. Déterminant

Révision du programme de MP2I : voir programme officiel page suivante.

*Extrait du programme officiel :*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **Compléments d'algèbre linéaire** | |
| Transvections par blocs. Invariance du déterminant.<br>Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. | |

## 3. Réduction (première partie, diagonalisation)

*Extrait du programme officiel :*

*La réduction des endomorphismes et des matrices carrées prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en première année. Elle trouve des applications et des illustrations dans d'autres domaines du programme (topologie, équations différentielles, systèmes dynamiques discrets, chaînes de Markov). Elle permet également de tisser des liens entre l'algèbre linéaire et l'algèbre générale, notamment polynomiale.*

*Le but de cette section est de donner une introduction substantielle au problème de la réduction. Les approches sont de deux types, qu'il convient d'identifier : la première, de nature géométrique, repose sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; la seconde, plus algébrique, fait appel aux polynômes annulateurs* [sera vue plus tard.].

*Sans soulever de difficulté, on signale que les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année s'étendent au cas d'un corps de base quelconque. Pour éviter les difficultés liées aux polynômes en caractéristique non nulle, la section est traité sous l'hypothèse que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée** | |
| Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. | En dimension finie, traduction matricielle. |
| Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre. | Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$. |
| Spectre d'un endomorphisme en dimension finie. | La notion de valeur spectrale est hors programme. |
| La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe. | Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. |
| Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie $n$ est fini, et de cardinal au plus $n$. | |
| Si deux endomorphismes $u$ et $v$ commutent, tout sous-espace propre de $u$ est stable par $v$. | Le noyau et l'image de $u$ sont stables par $v$. |
| Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée. | Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$.<br>Deux matrices semblables ont même spectre.<br>Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de $M$ dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de $M$ dans $\mathbb{K}'$. |
| **Polynôme caractéristique** | |
| Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. | Par convention le polynôme caractéristique est unitaire.<br>Notations $\chi_A$, $\chi_u$. Coefficients du polynôme caractéristique de degrés $0$ et $n-1$. |
| | Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. |
| Les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique. | |
| Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. | |
| Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. | |
| Multiplicité d'une valeur propre. | |
| La dimension du sous-espace propre associé à $\lambda$ est majorée par la multiplicité de $\lambda$. | |
| **Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables** | |
| Un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de $E$ dans laquelle sa matrice est diagonale. | Une telle base est constituée de vecteurs propres.<br>Cas des projecteurs, des symétries. |
| Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à $E$. | Caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres. |
| Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. | Interprétation en termes d'endomorphisme.<br>Dans les exercices pratiques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$. |
| Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension $n$ admettant $n$ valeurs propres distinctes. | Traduction matricielle. |
| Pour qu'un endomorphisme $u$ soit diagonalisable, il faut et il suffit que $\chi_u$ soit scindé et que, pour toute valeur propre de $u$, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité. | Traduction matricielle.<br>Cas où $\chi_u$ est scindé à racines simples. |

Le théorème de Cayley-Hamilton est énoncé, non démontré, mais aucune notion de réduction concernant les polynômes annulateurs ni la trigonalisation ne sont au programme de colle cette semaine.

*Semaine prochaine :* Réduction (avec polynômes annulateurs).

## 4. Questions de cours

*Les preuves marquées d'un astérisque* * *ne peuvent être posées qu'aux membres des trinômes 6 à 7. Ils doivent savoir faire tous les exercices CCINP mais ne seront pas interrogés dessus.*

(i) * Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$ : déduit de la décomposition en cycles à supports disjoints **et** preuve par récurrence.

(ii) * Déterminant triangulaire par blocs (par le théorème fondamental).

(iii) Déterminant de Vandermonde (par les polynômes ou par opérations aux choix de l'étudiant).

(iv) * Formule de la comatrice.

(v) Exercice classique : **Déterminant de Hurwitz**

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On pose $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}$.

(a) Si $a \neq b$, on pose $\Delta(x)$ le déterminant obtenu en ajoutant $x$ à chaque cœfficient de $D_n(a,b)$. Vérifier $\Delta$ est une fonction affine de $x$ et en déduire $D_n(a,b)$.

(b) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En déduire $D_n(a,a) = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}$.

(c) Pour $\mathbb{K}$ quelconque, retrouver l'expression de $D_n(a,a)$ en utilisant la multilinéarité du déterminant par rapport à ses colonnes.

(vi) Si deux endomorphismes commutent, l'image, le noyau et plus généralement les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

(vii) Définitions, caractérisations (5 pour les endomorphismes + 1 pour les matrices) et conditions suffisantes (2) de la diagonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice.

Démonstration·s au choix du colleur.

(viii) ✻ $\chi_A = X^n - (\operatorname{tr} A)X + \cdots + (-1)^n \det A$.

Si $\chi_A$ est scindé, expression de $\operatorname{tr} A$ et $\det A$ à l'aide des valeurs propres de $A$.

(ix) ✻ CNS sur la représentation par bloc d'un endomorphisme dans une base adaptée pour qu'un sous-espace soit stable.

Polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit sur un sous-espace stable.

Pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est entre 1 et la multiplicité de la valeur propre.

(x) **Exercices CCINP 59, 67, 69, 70, 72, 73, 83**

## 5. Exercices CCINP

- **CCINP 59** : Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit $E$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à $n$.
On pose : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$.

  1. Démontrer que $f$ est bijectif de deux manières :
     a) sans utiliser de matrice de $f$,
     b) en utilisant une matrice de $f$.
  2. Soit $Q \in E$. Trouver $P$ tel que $f(P) = Q$.
     **Indication** : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$ ?
  3. $f$ est-il diagonalisable ?

- **CCINP 67** : Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où $a, b, c$ sont des réels.
$M$ est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ? $M$ est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ ?

- **CCINP 69** : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $a$ est un réel.

  1. Déterminer le rang de $A$.
  2. Pour quelles valeurs de $a$, la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

- **CCINP 70** : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

  1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$. $A$ est-elle diagonalisable ?
  2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où $\mathrm{I}_3$ désigne la matrice identité d'ordre 3.
     Déduire de la question **1.** les éléments propres de $B$.

- **CCINP 72** : Soit $n$ un entier naturel non nul.
Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$, et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où $v$ est un vecteur donné de $E$.

  1. Donner le rang de $f$.
  2. $f$ est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur $v$)

- **CCINP 73** : On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

  1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$.
  2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
     En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec $A$ est $\operatorname{Vect}(I_2, A)$.

- **CCINP 83** : Soit $u$ et $v$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$.

  1. Soit $\lambda$ un réel non nul. Prouver que si $\lambda$ est valeur propre de $u \circ v$, alors $\lambda$ est valeur propre de $v \circ u$.
  2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes $u$ et $v$ définis par $u : P \longmapsto \int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
     Déterminer $\operatorname{Ker}(u \circ v)$ et $\operatorname{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$ ?
  3. Si $E$ est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
     **Indication** : penser à utiliser le déterminant.

# 6. Programme de MP2I

## A. Groupe symétrique

*Le groupe symétrique est introduit en vue de l'étude des déterminants, mais aussi pour son intérêt propre et ses interventions possibles dans diverses questions d'algèbre et de probabilités.*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Généralités** | |
| Groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. | Notation $S_n$. |
| Cycle, transposition. | Notation $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$. |
| Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité. | La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation. |
| **b) Signature d'une permutation** | |
| Décomposition d'une permutation en produit de transpositions. | |
| Signature : il existe un unique morphisme de groupes de $S_n$ dans $\{-1,1\}$ envoyant toute transposition sur $-1$. | La démonstration n'est pas exigible. |

## B. Déterminants

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Formes $n$-linéaires alternées** | |
| Forme $n$-linéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$.<br>Antisymétrie, effet d'une permutation. | La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures.<br>Si $f$ est une forme $n$-linéaire alternée et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\dots,x_n)=0$. |
| **b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base** | |
| Si $e$ est une base, il existe une unique forme $n$-linéaire alternée $f$ pour laquelle $f(e)=1$ ; toute forme $n$-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$. | Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible. |
| Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées. | Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède). |
| Comparaison, si $e$ et $e'$ sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$.<br>La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)\neq 0$. | |
| **c) Déterminant d'un endomorphisme** | |
| Déterminant d'un endomorphisme. | |
| Déterminant d'une composée. | Caractérisation des automorphismes. |
| **d) Déterminant d'une matrice carrée** | |
| Déterminant d'une matrice carrée. | Caractère $n$-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes. |
| Déterminant d'un produit. | Relation $\det(\lambda A)=\lambda^n \det(A)$. |
| Caractérisation des matrices inversibles. | |
| L'application $\det$ induit un morphisme de $\mathrm{GL}(E)$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) sur $\mathbb{K}^*$. | |
| Déterminant d'une transposée. | Caractère $n$-linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes. |
| **e) Calcul des déterminants** | |
| Effet des opérations élémentaires. | |
| Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. | |
| Déterminant d'une matrice triangulaire. | |
| Déterminant de Vandermonde. | Lien avec les polynômes de Lagrange. |
| **f) Comatrice** | |
| Comatrice. | Notation $\mathrm{Com}(A)$. |
| Relation $A\,\mathrm{Com}(A)^\top=\mathrm{Com}(A)^\top A=\det(A)I_n$. | Expression de l'inverse d'une matrice inversible. |