Programme de colle – MPI

1. Algèbre linéaire

Révisions complètes du cours de MP2I. Voir programme page suivante. À cela s'ajoute :

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Compléments d'algèbre linéaire	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\left(\sum_{i=1}^{p}F_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe. Base adaptée à une décomposition en somme directe.
Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E=\bigoplus E_i$ et si $u_i\in\mathscr{L}(E_i,F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule $u\in\mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{\mid E_i}=u_i$ pour tout i.	
Matrices définies par blocs. Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	Interprétation géométrique des blocs. La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible.

2. Polynômes et fractions rationnelles

Révision du programme de MP2I : voir programme officiel page suivante.

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Anneaux $\mathbb{K}[X]$	
Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.	
Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.	
Définition du PGCD de $n\geqslant 2$ polynômes en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Par convention, le PGCD est unitaire.
Irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles unitaires.	
Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme. L'étude des irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ pour un corps autre que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'est pas un objectif du programme.

3. Questions de cours

(i) Formule de Grassmann : deux démonstrations, avec des supplémentaires et avec des applications linéaires.
En détailler une et donner les grandes lignes de l'autre.

(ii) Toute matrice de rang r est équivalente à J_r.

(iii) $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est un anneau principal : détail de l'intégrité et de ses idéaux.

(iv) ✻ **Exercice classique** : montrer que deux sous-espaces de même dimension d'un espace de dimension finie possèdent un supplémentaire commun.

(v) ✻ **Exercice classique** : Soient $A,B,C\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $X\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $C=AXB$.

(vi) **CCINP 59, 60, 71, 85, 87, 90.**

4. Exercices CCINP

- **CCINP 59** : Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 2$.
  Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. On pose $\forall P\in E,\ f(P)=P-P'$.
  1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
     (a) sans utiliser de matrice de f,
     (b) en utilisant une matrice de f.
  2. Soit $Q\in E$. Trouver P tel que $f(P)=Q$.
     Indication : si $P\in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
  3. $(5/2)f$ est-il diagonalisable ?

- **CCINP 60** : Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M)=AM$.
  1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
  2. f est-il surjectif ?
  3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
  4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f$?

- **CCINP 71** : Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.
  1. Vérifier que $\mathbb{R}^3=P\oplus D$.
  2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
     Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
  3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

- **CCINP 85** :
  1. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $a\in\mathbb{R}$.
     (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1,X-a,(X-a)^2,\cdots,(X-a)^n\right)$.
     (b) Soit $r\in\mathbb{N}^*$. En déduire que a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a)\neq 0$ et $\forall k\in[\![0,r-1]\!]$, $P^{(k)}(a)=0$.
  2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P=X^5+aX^2+bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

- **CCINP 87** : Soient $a_0,a_1,\cdots,a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.
  1. Montrer que si $b_0,b_1,\cdots,b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant $\deg P\leqslant n$ et $\forall i\in\{0,\cdots,n\}\ P(a_i)=b_i$.
  2. Soit $k\in[\![0,\dots,n]\!]$.
     Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque $\forall i\in[\![0,\dots,n]\!]\ b_i=\begin{cases}0 \text{ si } i\neq k\\ 1 \text{ si } i=k\end{cases}$
  3. Prouver que $\forall p\in[\![0,\dots,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k^pL_k=X^p$.

- **CCINP 90** : $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
  Soient a_1,a_2,a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.
  1. Montrer que $\Phi:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{K}_2[X]&\longrightarrow&\mathbb{K}^3\\ P&\longmapsto&\left(P(a_1),P(a_2),P(a_3)\right)\end{array}\right.$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
  2. On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k\in\{1,2,3\}$, $L_k=\Phi^{-1}(e_k)$.
     (a) Justifier que (L_1,L_2,L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
     (b) Exprimer les polynômes L_1,L_2 et L_3 en fonction de a_1,a_2 et a_3.
  3. Soit $P\in\mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1,L_2,L_3).
  4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1)$, $B(1,3)$, $C(2,1)$.
     Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

5. Programme de MP2I

Extrait du programme officiel :

A. Calcul matriciel

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^{\top}$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	
b) Opérations élémentaires	
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	
c) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.
e) Anneau des matrices carrées	
Anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Inverse d'une transposée.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.

B. Matrices et applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a + ib$.
Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
c) Systèmes linéaires	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	Structure affine de l'ensemble des solutions.
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

C. Changements de bases, équivalence et similitude

Contenus	Capacités & commentaires
a) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre.	
Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.	
Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
b) Matrices équivalentes et rang	
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r.	La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.
Matrices équivalentes.	
Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.	Classification des matrices équivalentes par le rang.
Invariance du rang par transposition.	
Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
c) Matrices semblables et trace	
Matrices semblables.	Interprétation géométrique. Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
Trace d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, invariance par similitude.	
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(vu)$.	Notation $\mathrm{tr}(u)$. Trace d'un projecteur.

D. Polynômes et fractions rationnelles

Contenus	Capacités & commentaires

a) Anneau des polynômes à une indéterminée

Anneau $\mathbb{K}[X]$. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

b) Divisibilité et division euclidienne

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés.	
Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.

c) Fonctions polynomiales et racines

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ». Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Multiplicité d'une racine.	Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète).	Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants ; les autres doivent être retrouvées rapidement.

d) Dérivation

Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	

e) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.	Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B.
Algorithme d'Euclide.	L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés. Un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$.
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
PPCM. Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss. PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	Notation $A \vee B$. Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.	La démonstration est hors programme. Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

g) Formule d'interpolation de Lagrange

Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \ldots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i.	Expression de P. Description des polynômes Q tels que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i.

h) Fractions rationnelles

Corps $\mathbb{K}(X)$. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle.	La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.	

i) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$

Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. Si λ est un pôle simple, coefficient de $\dfrac{1}{X-\lambda}$. Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.	La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue. Application au calcul de primitives, de dérivées k-ièmes.