

Sommabilité (CCINP MP 2016, 2017)

1. Par sommation d'une famille à termes réels positifs, symétrie, puis somme double produit, dans $[0, +\infty]$,

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i}{2^{i+j}} + \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{j}{2^{i+j}} = 2 \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \left(\frac{i}{2^i} \times \frac{1}{2^j} \right) = 2 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^j = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

Première méthode On peut ensuite utiliser le théorème de Fubini positif en écrivant

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^n = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 8$$

d'où on tire que $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, de somme 8.

Deuxième méthode Nous allons reconnaître un produit de Cauchy en écrivant

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} = (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Donc, par absolue convergence des séries géométriques (à termes positifs) toutes deux égales à $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right)^2 = 4.$$

Finalement,

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1-1) \left(\frac{1}{2} \right)^n = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^n - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 8.$$

Ainsi, $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, de somme 8.

2. On a affaire à une somme double produit. Comme les termes sont positifs, quitte à travailler dans $[0, +\infty]$, on peut toujours écrire

$$\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^2 < +\infty$$

Comme le résultat est fini, $\left(\frac{1}{p^2 q^2} \right)_{(p,q) \in A}$ est sommable et $\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^2 q^2} = \frac{\pi^4}{36}$.

3. **Première méthode** On remarque que pour tout $(p,q) \in A$, $\frac{1}{p^2 + q^2} \geq \frac{1}{(p+q)^2} \geq 0$.

Puis par une sommation par diagonale (sommation par paquets $A = \bigsqcup_{n=2}^{+\infty} D_n$ où

$$D_n = \{(p,q) \in A, p+q=n\} = \{(p, n-p), 1 \leq p \leq n-1\}$$

on peut écrire dans $[0, +\infty]$

$$\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^2 + q^2} \geq \sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{(p+q)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2} = +\infty$$

Car $\frac{n-1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ est un terme général positif de série divergente.

Donc $\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^2 + q^2} = +\infty$ et $\left(\frac{1}{p^2 + q^2} \right)_{(p,q) \in A}$ n'est pas sommable.

Deuxième méthode Par le théorème de Fubini dans le cas positif, dans $[0, +\infty]$, on a

$$\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^2 + q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + q^2}$$

et on montre la divergence de la série de terme général $\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + q^2}$ par comparaison à une intégrale. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_p : t \mapsto \frac{1}{p^2 + t^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

On a donc pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $f_p(q) \geq \int_q^{q+1} f_p(t) dt$ donc en sommant et en passant à la limite, la série $\sum_{q \geq 1} \frac{1}{p^2 + q^2}$ étant bien convergente,

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + q^2} \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{p^2 + t^2} = \frac{1}{p} \int_1^{+\infty} \frac{\frac{dt}{p}}{1 + \left(\frac{t}{p}\right)^2} = \frac{1}{p} \left[\text{Arctan} \frac{t}{p} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \frac{1}{p} \right) \geq \frac{\pi}{4p}$$

Or $\sum \frac{1}{p}$ diverge donc, par comparaison de termes positifs, $\sum_p \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + q^2} \right)$ diverge et

$\left(\frac{1}{p^2 + q^2} \right)_{(p,q) \in A}$ n'est pas sommable.

Autour de la transformation d'Abel (CNM TSI 2002, CCINP MP 2014)

I. Transformation d'Abel

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $b_k = B_k - B_{k-1}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule avec la question précédente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \end{aligned}$$

donc $\sum_{k=0}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

2. On suppose la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée, donc $|(a_n - a_{n+1}) B_n| = \mathcal{O}(|a_n - a_{n+1}|)$.

La série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ étant convergente par hypothèse, les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs assurent la convergence de la série $\sum |(a_n - a_{n+1}) B_n|$, c'est-à-dire l'absolue convergence, et donc la convergence, de la série $\sum (a_n - a_{n+1}) B_n$. Comme, de plus, $a_n B_n \rightarrow 0$ car $a_n \rightarrow 0$ et (B_n) bornée, la relation démontrée en 1.b montre que la série de terme général $a_n b_n$ converge.

3. Supposons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Alors, par télescopage,

$$\sum_{k=0}^n |a_k - a_{k+1}| = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_0,$$

c'est-à-dire que la série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ converge.

Les hypothèses de la question précédente sont donc vérifiées, donc

la série de terme général $a_n b_n$ converge.

4. Supposons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Si l'on pose $b_n = (-1)^n$ pour tout n , alors $B_n = \sum_{k=0}^n b_k = 0$ ou 1 selon la parité de n , donc la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. D'après la question précédente, la série $\sum a_n b_n$ converge.

On a donc démontré le *critère spécial sur les séries alternées* :

Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle, la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

(Notez que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle implique $a_n \geq 0$ pour tout n !)

5. (a) On demande de calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. Notons que, par hypothèse, $e^{i\theta} \neq 1$.

Par théorème, $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta/2} (-2i) \sin(n\theta/2)}{e^{i\theta/2} (-2i) \sin(\theta/2)}$ donc $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i(n+1)\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$.

- (b)
- Lorsque $\alpha > 1$, la série de terme général $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente.
 - Lorsque $\alpha \leq 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc

la série est grossièrement divergente.

- Soit $\alpha \in]0, 1]$. On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question 3.

Notons tout de même que le fait que la série commence à $n = 1$ à la place de $n = 0$ n'a pas d'incidence.

La suite $(1/n)$ est décroissante et tend vers 0.

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$ donc la suite des sommes partielles de $\sum e^{in\theta}$ est bornée. Donc

la série est (semi-)convergente.

- Bilan : $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

II. Application à l'étude d'une série trigonométrique

1. Si x est un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$, alors, d'après la question 5.a, $C_n(x) + iS_n(x) = \sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$,
d'où en séparant partie réelle et imaginaire,

$$C_n(x) = \frac{\cos(\frac{n+1}{2}x) \sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{\frac{1}{2} [\sin(\frac{-x}{2}) + \sin(\frac{2n+1}{2}x)]}{\sin(\frac{x}{2})} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

et

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. On a donc, pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ fixé, $|S_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$, c'est-à-dire que la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Comme en **I.5.b** qu'on peut aussi utiliser directement en prenant la partie imaginaire avec $\alpha = 1$, en appliquant alors le résultat de la question **I.3.** avec $a_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ (la valeur de a_0 importe peu) et $b_n = \sin nx$, on obtient que la série trigonométrique

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n} \text{ converge lorsque } x \notin 2\pi\mathbb{Z}. \text{ Et puisqu'elle converge aussi lorsque } x \in 2\pi\mathbb{Z}$$

($\sin nx = 0$ pour tout n), on peut donc définir $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

3. Posons pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \geq 1$, $f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n}$.

Alors f_N est impaire donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_N(-x) = -f_N(x)$ et par unicité de la limite, $f(-x) = -f(x)$ donc f est impaire.

On montre de la même façon que, puisque les f_N sont 2π -périodiques, il en est de même de f .

4. Pour $x \in]0, \pi[$ on a, en utilisant un résultat de la question **II.1**, et puisque la fonction $t \mapsto \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ est continue sur $]0, \pi[$

$$\int_x^\pi \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \int_x^\pi \frac{dt}{2} + \int_x^\pi C_n(t) dt = \frac{\pi-x}{2} + \sum_{k=1}^n \int_x^\pi \cos kt dt$$

donc $\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi-x}{2} - \frac{1}{2} \int_x^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} dt.$

5. (a) Une intégration par parties (les fonctions considérées étant toutes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, \pi]$ pour $x \in]0, \pi[$) donne

$$\begin{aligned} \int_x^\pi \underbrace{h(t)}_{u(t)} \underbrace{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}_{v'(t)} dt &= \left[\frac{-1}{n+\frac{1}{2}} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t h(t) \right]_x^\pi + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_x^\pi h'(t) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t dt \\ &= \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x h(x) + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_x^\pi h'(t) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t dt, \end{aligned}$$

On en déduit, en remarquant que h' est continue sur le segment $[x, \pi]$ donc bornée par une constante M sur ce segment,

$$\begin{aligned} \left| \int_x^\pi h(t) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t dt \right| &\leq \frac{2}{2n+1} \left(\underbrace{|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x|}_{\leq 1} |h(x)| + \left| \int_x^\pi \underbrace{h'(t)}_{\leq M} \underbrace{|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t|}_{\leq 1} dt \right| \right) \\ &\leq \frac{2}{2n+1} (|h(x)| + |\pi-x|M), \end{aligned}$$

ce qui implique que $\int_x^\pi h(t) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

Remarque : nous venons de redémontrer, dans un cas particulier, le fameux lemme de Borel-Lebesgue.

(b) On déduit alors de la question précédente et de la question II.4, pour tout $x \in]0, \pi[$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi - x}{2},$$

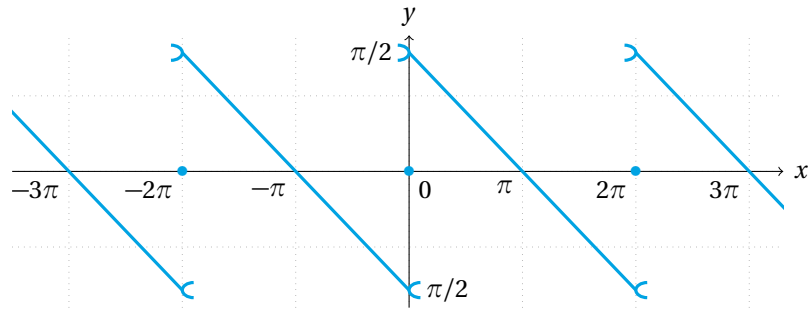
donc, par unicité de la limite, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ et cette égalité est encore vraie pour $x = \pi$.

Si x appartient à $]\pi, 2\pi[$ on a $x - 2\pi \in]-\pi, 0[$ et $2\pi - x \in]0, \pi[$, donc, h étant 2π -périodique et impaire,

$$f(x) = f(x - 2\pi) = -f(2\pi - x) = -\frac{\pi - (2\pi - x)}{2} = \frac{\pi - x}{2},$$

donc pour tout $x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

(c)



III. Une majoration uniforme des sommes partielles de la série précédente

6. (a)

$$\begin{aligned} \sum_{p=m+1}^n \frac{\sin px}{p} &= \sum_{p=m+1}^n \frac{S_p(x) - S_{p-1}(x)}{p} = \sum_{p=m+1}^n \frac{S_p(x)}{p} - \sum_{p=m+1}^n \frac{S_{p-1}(x)}{p} \\ &= \sum_{p=m+1}^n \frac{S_p(x)}{p} - \sum_{p=m}^{n-1} \frac{S_p(x)}{p+1} = \left[\frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} \frac{S_p(x)}{p} \right] - \left[\sum_{p=m+1}^{n-1} \frac{S_p(x)}{p+1} + \frac{S_m(x)}{m+1} \right] \end{aligned}$$

donc $\sum_{p=m+1}^n \frac{\sin px}{p} = \frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} S_p(x) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) - \frac{S_m(x)}{m+1}.$

(b) On remarque déjà que, pour $x \in]0, 2\pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|S_n(x)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|} = \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On déduit alors de la relation précédente et de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=m+1}^n \frac{\sin px}{p} \right| &\leq \left| \frac{S_n(x)}{n} \right| + \sum_{p=m+1}^{n-1} |S_p(x)| \underbrace{\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right|}_{\geq 0} + \left| \frac{S_m(x)}{m+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) + \frac{1}{m+1} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{m+1} \right) = \frac{2}{(m+1) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, puisque la série converge (cf. II.2), on obtient :

$$\left| \sum_{p=m+1}^{+\infty} \frac{\sin px}{p} \right| \leq \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

7. (a) Par définition de $k = \left\lfloor \frac{\pi}{x} \right\rfloor$ on a $kx \leq \pi$ donc pour tout $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\sin(px) \geq 0$.

D'autre part, on sait que pour tout $X \geq 0$ on a $\sin X \leq X$ donc pour tout $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\sin(px) \leq px$.

Ainsi, $0 \leq \sum_{p=1}^k \frac{\sin px}{p} \leq \pi.$

(b) Inégalité classique : comme $\sin$ est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ($\sin'' = -\sin \leq 0$) et $y = \frac{2}{\pi}x$ est l'équation de la corde reliant les points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) D'après l'inégalité obtenue en III.6.b et le résultat précédent (puisque $\frac{x}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$), on a :

$$\left| \sum_{p=k+1}^n \frac{\sin px}{p} \right| \leq \frac{2}{(k+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{2}{(k+1)\frac{2}{\pi}\frac{x}{2}} = \frac{2\pi}{(k+1)x} < 2$$

puisque par définition de la partie entière on a $k \leq \frac{\pi}{x} < k+1$. Donc $\left| \sum_{p=k+1}^n \frac{\sin px}{p} \right| \leq 2.$

8. En combinant les résultats des deux questions précédentes on a

$$\forall x \in]0, \pi], \left| \sum_{p=1}^n \frac{\sin px}{p} \right| \leq \left| \sum_{p=1}^k \frac{\sin px}{p} \right| + \left| \sum_{p=k+1}^n \frac{\sin px}{p} \right| \leq 2 + \pi,$$

puis, par π -périodicité de la fonction $x \mapsto \sum_{p=1}^n \frac{\sin px}{p}$, $\forall x \in \mathbb{R}, \left| \sum_{p=1}^n \frac{\sin px}{p} \right| \leq 2 + \pi.$

Fin