Devoir en Temps Limité n° 2

À lire attentivement

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas $\boxed{\text{encadrées}}$ et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des questions (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- Il est conseillé d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Aucun départ avant la fin des 4 heures n'est autorisé.
- **LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.**
- ⚠ Vous devez traiter
  - L'exercice **commun CCINP** ;
  - Un problème parmi
    - le problème **CCINP** choisi obligatoirement si vous n'êtes pas dans le groupe ✱ ;
    - le problème **Mines-Ponts** choisi obligatoirement si vous êtes dans le groupe ✱ .

Je vous fais confiance, vous êtes capable du meilleur !

Extraits du rapport de l'un des sujets :

« Un grand nombre de copies nous ont paru ne pas répondre au minimum requis pour cette épreuve : orthographe et syntaxe déficientes, abus des abréviations, écriture difficilement lisible, questions non numérotées, sans parler des questions dont la rédaction est abandonnée en cours de route et des nombreuses ratures.

Elles donnent un sentiment de désinvolture, voire de démission, de la part de leurs auteurs. Nous avons également constaté trop fréquemment une connaissance insuffisante du cours, l'incapacité de le mettre en pratique dans des situations simples, et le recours à des raisonnements manifestement faux pour aboutir au résultat voulu, ce qui manifeste clairement la malhonnêteté intellectuelle de leurs auteurs.

Autant dire qu'un étudiant sérieux et travailleur, qui apprend son cours et s'entraîne aux méthodes et exercices classiques de celui-ci, a déjà de sérieux atouts.

S'il prend le temps de réfléchir sur le sens des problèmes et d'en chercher le fil du raisonnement, s"il s'efforce de recourir aux outils dont il dispose pour attaquer des questions à première vue insolubles, il a de grandes chances d'obtenir une note qui le propulse vers les niveaux de l'admissibilité.

Plus encore, par cette attitude orthogonale à un bachotage stérile, il se il se prépare ainsi au mieux à son futur métier d'ingénieur ou de chercheur par la recherche de solutions à des problèmes nouveaux qui ne manqueront pas de se poser à lui, tant il est vrai que la science et la technologie ne progressent qu'en sortant des sentiers battus. »

Exercice CCINP Commun aux deux sujets
Familles sommables

Les trois questions sont indépendantes. On admet que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1. **2016** – Démontrer que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.
2. **2017** – Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable et calculer sa somme.
3. **2017** – Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

Problème CCINP – Autour de la transformation d'Abel

I. Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On s'intéresse ici à la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

Pour tout entier naturel n, on pose $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer b_k à l'aide deux termes de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

   On parle de **transformation d'Abel**.
2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.
3. Établir que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle, décroissante, de limite nulle et si la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.
4. Énoncez et démontrer en utilisant une transformation d'Abel un critère garantissant la convergence d'une série alternée.
5. Exemple : dans cette question θ est un réel différent de $2k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

   (a) Calculer pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$. On donnera une forme simplifiée dans laquelle il ne reste plus qu'une exponentielle, en facteur.

   (b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

II. Application à l'étude d'une série trigonométrique

Pour tout réel x et tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \quad \text{et} \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $C_n(x)+\mathrm{i}S_n(x)$ et en déduire que

$$\frac{1}{2}+C_n(x)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad S_n(x)=\frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

2. En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et établir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Dans la suite, on pose $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ pour $x\in\mathbb{R}$, et on cherche à calculer la valeur de cette somme de série.

3. Vérifier soigneusement que f est impaire et 2π-périodique.
4. Soit $x\in]0,\pi[$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}=\frac{\pi-x}{2}-\frac{1}{2}\int_x^\pi\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$.
5. Soit $x\in]0,\pi[$. Pour tout $t\in[x,\pi]$, on pose $h(t)=\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}$.
   (a) En procédant à un intégration par partie, et en en majorant la valeur absolue, montrer que $\int_x^\pi h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   (b) Montrer que pour tout $x\in]0,2\pi[$, $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$.
   (c) Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

III. Une majoration uniforme des sommes partielles de la série précédente

On conserve les notations de la partie précédente. On note, pour tout $n\geqslant 1$, $R_n(x)$ le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

6. Soit $x\in]0,2\pi[$.
   (a) Montrer, en utilisant une transformation d'Abel, que pour tout couple $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $1\leqslant m<n$, on a $\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}=\frac{S_n(x)}{n}+\sum_{p=m+1}^{n-1}S_p(x)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)-\frac{S_m(x)}{m+1}$.
   (b) En déduire que $|R_m(x)|\leqslant\frac{2}{(m+1)\sin\frac{x}{2}}$.
7. Soit $x\in]0,\pi]$. On note $k=\left\lfloor\frac{\pi}{x}\right\rfloor$ la partie entière de $\frac{\pi}{x}$.
   (a) Montrer que $0\leqslant\sum_{p=1}^{k}\frac{\sin px}{p}\leqslant\pi$.
   (b) Montrer que si $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\theta\geqslant\frac{2}{\pi}\theta$.
   (c) Soit $n\geqslant k+1$. Montrer que $\left|\sum_{p=k+1}^{n}\frac{\sin px}{p}\right|\leqslant 2$.
8. En déduire, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout entier $n\geqslant 1$, une majoration uniforme (indépendante à la fois de x et de n) de la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(nx)}{n}$.

Problème Mines-Ponts Maths 2 PSI 2013
La formule du triple produit de Jacobi

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Si $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite numérique, on note $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ la limite (si elle existe) de la suite

$$A_n=\prod_{k=1}^{n}a_k=a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n.$$

L'expression $i=1,m$ signifie « pour tout entier i tel que $1\leqslant i\leqslant m$ ».
Soit $\zeta\in\mathbb{C}$, on rappelle que si $\mathfrak{Re}(\zeta)>0$ alors $\mathrm{Arg}(\zeta)=\mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathfrak{Im}(\zeta)}{\mathfrak{Re}(\zeta)}\right)$.
Dans tout ce problème, z notera un nombre complexe non nul et x un nombre réel tel que $|x|<1$.

1. Préambule

Q.1. Soient $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$. Démontrer par récurrence que

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+\zeta_k)-1\right|\leqslant\prod_{k=1}^{n}(1+|\zeta_k|)-1 \tag{1}$$

2. La formule de Jacobi

On pose

$$Q(x)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-x^{2k}\right) \quad\text{et}\quad H(x,z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z^2x^{2k-1}\right) \tag{2}$$

Q.2. Montrer que $Q(x)$ est bien défini, c'est à dire que le suite de terme général $\prod_{k=1}^{n}\left(1-x^{2k}\right)$ converge.

Q.3. Soit $\rho_k=\left|1+z^2x^{2k-1}\right|$. Montrer que le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty}\rho_k$ converge. On pourra utilement penser à l'utilisation du logarithme pour transformer le produit infini en série.

Q.4. Soit $\theta_k=\mathrm{Arg}\left(1+z^2x^{2k-1}\right)$. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k$ converge.

Q.5. En déduire que H est bien défini.

Q.6. A l'aide de l'inégalité (1), démontrer que $Q(x)\to 1$ quand $x\to 0$.

On pose

$$F(x,z)=H(x,z)H\left(x,z^{-1}\right) \tag{3}$$

Q.7. Montrer que

$$F(x,xz)=\left(1+z^{-2}x^{-1}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z^2x^{2k+1}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z^{-2}x^{2k-1}\right)$$

et en déduire que $xz^2F(x,xz)=F(x,z)$.

On admettra que $F(x,z)$ se décompose de façon unique sous la forme suivante :

$$F(x,z)=F_1(x,z)+F_2\left(x,z^{-1}\right)$$

où pour x fixé, $F_1(x,\xi)$ et $F_2(x,\xi)$ sont les sommes respectives de deux séries entières de rayon de convergence infini, ce qui signifie que les séries convergent pour tout $\xi\in\mathbb{C}$, soit

$$F_1(x,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x)\xi^k \quad \text{et} \quad F_2(x,\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}(x)\xi^k$$

les fonctions a_k, $k=0,\infty$ et a_{-k}, $k=1,\infty$, de la variable réelle x étant à valeurs dans $\mathbb{C}$. On notera

$$F(x,z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(x)z^k,\ z\in\mathbb{C}^* \tag{4}$$

Q.8. On pose $F_1^n(x,z)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)z^k$. Démontrer que $a_0(x)=F_1(x,0)$ et que pour $n\geqslant 0$,

$$a_{n+1}(x)=\lim_{z\to 0}\frac{F_1(x,z)-F_1^n(x,z)}{z^{n+1}}$$

Q.9. En déduire que si $F(x,z)$ vérifie à la fois (4) et $F(x,z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k(x)z^k$, alors $\forall k\in\mathbb{Z}$, les fonctions a_k et d_k sont égales, c'est-à-dire que les coefficients $a_k(x)$ dans l'expression (4) de $F(x,z)$ sont déterminés de façon unique.

Q.10. Montrer qu'il existe des fonctions b_m, $m\in\mathbb{Z}$, de la variable réelle x, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telles que

$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\ F(x,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m(x)z^{2m}$$

Q.11. A l'aide de la question **7**, montrer que $\forall m\in\mathbb{Z}$, $b_m(x)=b_{m-1}(x)x^{2m-1}$.

Q.12. Montrer que $\forall m\in\mathbb{N}$, $b_m(x)=b_{-m}(x)$ et donner l'expression de $b_m(x)$ en fonction de $b_0(x)$ et x.

Q.13. A l'aide de l'inégalité (1), démontrer que $H(x,z)\to 1$ quand $x\to 0$.

Q.14. On admet que la fonction $x\mapsto\sum_{m=1}^{\infty}x^{m^2}$ est continue en 0.

En déduire que $b_0(x)\to 1$ quand $x\to 0$.

On pose

$$P(x,z)=Q(x)F(x,z) \quad \text{et} \quad \eta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \tag{5}$$

Q.15. Montrer que

$$P(x,\eta)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-x^{4k}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-x^{4k-2}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+x^{4k-2}\right)$$

Q.16. En déduire que $P(x,\eta)=P\left(x^4,\mathrm{i}\right)$.

On pose $c_m(x)=Q(x)b_m(x)$.

Q.17. A l'aide de la question **16** et de l'expression de $b_m(x)$ de la question **12**, montrer que $c_0\left(x^4\right)=c_0(x)$.

Q.18. En utilisant une récurrence et à l'aide des questions **14** et **6**, en déduire que pour tout $x\in]-1,1[$, $c_0(x)=1$ et la **formule du triple produit**

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-x^{2k}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z^2x^{2k-1}\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+z^{-2}x^{2k-1}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x^{m^2}z^{2m} \tag{6}$$

3. Le nombre de partitions d'un entier

Q.19. En posant $x=t^{3/2}$ et par un choix judicieux de z^2, déduire la **formule des nombres pentagonaux** d'Euler :

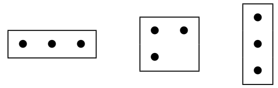
$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-t^m\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m t^{(3m^2+m)/2},\ t\in[0,1[\tag{7}$$

de celle du triple produit (6).

Si n est un entier positif, on note $p(n)$, et on appelle nombre de partitions de n, le nombre de façons de représenter n comme une somme d'entiers positifs sans prendre en considération l'ordre des termes ; c'est encore le nombre de solutions $(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{N}^n$ de l'équation

$$\sum_{j=1}^{n}r_j=n,\quad \text{telles que} \quad r_1\geqslant r_2\geqslant\ldots\geqslant r_n\geqslant 0 \tag{8}$$

On aura par exemple $p(3)=3$ car $3=3=2+1=1+1+1$, partitions que l'on représente sous la forme des trois diagrammes de Ferrer suivants :



On note S_1 l'ensemble des solutions de (8).
On note également S_2 l'ensemble des solutions $(q_1,\ldots,q_n)\in\mathbb{N}^n$ de

$$\sum_{j=1}^{n}jq_j=n \tag{9}$$

On note f l'application $\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}^n$ définie par $f(q_1,\ldots,q_n)=(r_1,\ldots,r_n)$ où $r_j=\sum_{i=j}^{n}q_i$.

Q.20. En s'aidant de l'application f, démontrer que S_1 et S_2 comportent le même nombre d'éléments.

Q.21. Démontrer que pour $n>0$, $p(n)$ est le coefficient de t^n dans le développement de $\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}t^{ik}\right)$.

Q.22. A l'aide de la formule d'Euler (7), démontrer que

$$\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}p(k)t^k\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m t^{(3m^2+m)/2}\right)=1$$

Q.23. En déduire la valeur de $p(n)$, $n=1,7$.

FIN DE L'ÉNONCÉ