

DL 3 – EXERCICE E3A + PROBLÈME CCINP

Exercice : E3A – Algèbre linéaire

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \int_0^1 P(t) dt$.

- Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Généralités sur φ**
 - Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
 - Déterminer $\text{Im } \varphi$ et la dimension du noyau de φ .
- On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \int_0^x P(t) dt$.
 - Justifier que l'application ψ est linéaire.
 - Démontrer que $\text{Im } \psi = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^{n+1})$.
 - Démontrer que $P \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \psi(P) \in \text{Vect}(X(X-1), \dots, X^n(X-1))$.
 - Donner alors une base de $\text{Ker } \varphi$.
- On note $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
 - Donner la dimension de $\mathcal{H}$.
 - Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$. Démontrer que la famille $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.
 - Déterminer les composantes de φ dans cette base.

Problème CCINP – Comparaison de convergences

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I .

- (a) Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I .
- (b) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I .

- On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I .
On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.
- On pose pour $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\frac{x^2 + n}{n^2} \right)$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0, 1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0, 1]$.
- Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I , a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?
On attend une réponse détaillée et on pourra utiliser une série usuelle présente dans le formulaire de développements limités.

Partie II

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0; 1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n (1-x)$.

- Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur I .
- (a) Calculer pour $n \geq 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.
- (b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n}$ converge.
- (a) Calculer pour tout $x \in I$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$.
- (b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I .
On pourra observer que pour $k \geq n+1$, $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$.
- (c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
- Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ telle que :
 - La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I .
 - La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I .
 - La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I .
- Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I .