

Partie I - Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

I.A.1)

```

1 let u n =
2   (if n mod 2 = 0 then
3     1.
4   else
5     -1.
6   ) /. float_of_int n
7 ;;
8
9 let suite x n =
10   let rec aux p q sommeS liste n =
11     match n with
12     | 0 -> liste
13     | _ ->
14       let (p1, q1, s) =
15         if sommeS > x then
16           (p, 1 + q, 2 * q + 1)
17         else
18           (1 + p, q, 2 * p + 2)
19       in
20       aux p1 q1 (sommeS +. u s) (s :: liste) (n - 1)
21   in
22   aux 0 0 0. [] n
23 ;;

```

OCaml

I.A.2) Il semble sur le dessin que

$$S_n \rightarrow -1, \text{ en décroissant lorsqu'elle est au dessus de } -1, \text{ et en croissant sinon}$$

et on conjecture que pour x quelconque, on aura $S_n \rightarrow x$ de la même manière.

Le principe de l'algorithme est de sommer les termes de la série harmonique alternée de telle manière qu'on ajoute le premier terme d'indice impair non encore utilisé lorsque la somme partielle est trop grande (ie $> x$) et le premier terme pair non encore utilisé sinon.

I.B - On a déjà, par construction, que $\text{pour tout } n \geq 1, S_n = u_{s(1)} + \dots + u_{s(n)}.$

De plus, $p_0 + q_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + q_n + 1$ (dans tous les cas), donc

$$\text{pour tout } n \geq 1, p_n + q_n = n.$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n la propriété $\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$

Montrons par récurrence simple que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

Pour $n = 1$, on a deux cas :

- Soit $x < 0 = S_0$ et alors $q_1 = 1, p_1 = 0, s(1) = 1$ donc P_1 est vraie.
- Soit $x \geq 0 = S_0$ et alors $q_1 = 0, p_1 = 1, s(1) = 2$ donc P_1 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel P_n est vraie. On a deux cas :

- Soit $S_n > x$ et alors $q_{n+1} = 1 + q_n$, $p_{n+1} = p_n$, $s(n+1) = 2q_{n+1} - 1$ et

$$\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$$

par hypothèse de récurrence. Alors

$$\{s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} \cup \{s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\}.$$

- Soit $S_n \leq x$ et alors $q_{n+1} = q_n$, $p_{n+1} = 1 + p_n$, $s(n+1) = 2p_{n+1}$ et

$$\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\}$$

par hypothèse de récurrence. Alors

$$\{s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\} \cup \{s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\}.$$

ce qui établit la récurrence.

Finalement, pour tout $n \geq 1$, $\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\{s(1), s(2), \dots, s(n)\}| = |\{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}| = p_n + q_n = n$, donc s est injective.

I.C.1) Presque une question de cours. Si u est une suite d'entiers convergente vers ℓ , alors à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| < \frac{1}{2}$, donc si $n \geq N$, $|u_n - u_N| \leq |u_n - \ell| + |u_N - \ell| < 1$ et donc $u_n = u_N$ car la suite est à valeurs entières.

Finalement, une suite d'entiers convergente est stationnaire.

I.C.2) a) La suite (p_n) étant croissante vu sa définition, si elle est majorée, elle converge par théorème de la limite monotone, donc elle stationne vu la question précédente.

Cela signifie qu'on a un rang n_0 à partir duquel on sera systématiquement dans la première situation. On a alors, pour $n \geq n_0$, $S_n > x$, $p_n = p_{n_0}$, $q_n = q_{n_0} + n - n_0$ et

$$S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^n u_{2q_k-1} = S_{n_0} - \sum_{k=n_0+1}^n \frac{1}{2q_k-1} = S_{n_0} - \sum_{k=n_0+1}^n \frac{1}{2(q_{n_0} + k - n_0) - 1}$$

donc, avec un changement d'indice dans la somme, $S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}$.

Or $\frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1} \sim \frac{1}{2k}$ terme général positif de série divergente (série harmonique) donc, par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ ce qui contredit le fait que $S_n > x$ à partir du rang n_0 .

Ainsi, la suite (p_n) n'est pas majorée ...

b) ... et comme elle est croissante, par théorème de la limite monotone, $p_n \rightarrow +\infty$.

I.C.3) On peut effectuer le même genre de raisonnement sur (q_n) : si elle était majorée, comme elle est croissante, elle convergerait, donc serait stationnaire, donc à partir d'un certain rang n_0 , on aurait

$$x \geq S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2p_{n_0} + 2k - 2n_0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

ce qui est contradictoire. C'est donc que $q_n \rightarrow +\infty$.

I.C.4) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, comme $p_n \rightarrow +\infty$ et $q_n \rightarrow +\infty$, à partir d'un certain rang, $m \leq 2p_n$ et $m \leq 2q_n + 1$, donc, suivant la parité de m , $m \in \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n + 1\}$, donc m a un antécédent par s qui est bien surjective.

Avec l'injectivité vue en I.B, on a bien que $s \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}^*)$.

I.D.1) Traitons quatre cas disjoints :

- Soit $S_{n+1} > x$ et $S_n > x$, donc $u_{s(n+1)} < 0$ et alors $|S_{n+1} - x| = S_{n+1} - x = S_n - x + u_{s(n+1)} < S_n - x = |S_n - x|$.
- Soit $S_{n+1} > x$ et $S_n \leq x$, donc $u_{s(n+1)} > 0$ et alors $|S_{n+1} - x| = S_{n+1} - x = S_n - x + u_{s(n+1)} \leq u_{s(n+1)} = |u_{s(n+1)}|$.
- Soit $S_{n+1} \leq x$ et $S_n \leq x$, donc $u_{s(n+1)} > 0$ et alors $|S_{n+1} - x| = x - S_{n+1} = x - S_n - u_{s(n+1)} < x - S_n = |S_n - x|$.
- Soit $S_{n+1} \leq x$ et $S_n > x$, donc $u_{s(n+1)} < 0$ et alors $|S_{n+1} - x| = x - S_{n+1} = x - S_n - u_{s(n+1)} < -u_{s(n+1)} = |u_{s(n+1)}|$.

Dans tous les cas, $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x|$ ou $|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$.

I.D.2) On raisonne par l'absurde : s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $|S_{n+1} - x| > |u_{s(n+1)}|$, alors pour tout $n > N$, $S_{n+1} - x$ et $S_n - x$ ont même signe vu la preuve de la question précédente. Ainsi, à partir d'un certain rang, la position de S_n par rapport à x est constante, ce qui revient à avoir (p_n) ou (q_n) stationnaire, ce qui est exclu.

Ainsi, pour tout naturel N , il existe un entier $n > N$ tel que $|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$.

I.D.3) Le fait, vu en I.C.2, que $p_n \rightarrow +\infty$ et $q_n \rightarrow +\infty$ suffit à justifier

l'existence d'un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$.

(Prendre le maximum des deux rangs.)

I.D.4) On a déjà, avec la question I.D.1, dans tous les cas, $|S_{n+1} - x| \leq v_n$ car $u_{s(n+1)} \in \{u_{2p_{n+1}}, u_{2q_{n+1}+1}\}$.

Puis, par croissance de (p_n) et (q_n) , et comme ici $p_{n+1} \geq 1$ et $q_{n+1} \geq 1$, $|u_{2p_{n+2}}| = \frac{1}{2p_{n+2}} \leq |u_{2p_{n+1}}| \leq v_n$ et

$$|u_{2q_{n+2}-1}| = \frac{1}{2q_{n+2}-1} \leq |u_{2q_{n+1}-1}| \leq v_n.$$

Ainsi, $v_{n+1} \leq v_n$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante. Comme elle est minorée (par 0), elle converge vers $\ell \geq 0$.

Or, comme $p_n \rightarrow +\infty$ et $q_n \rightarrow +\infty$, $u_{2p_{n+1}} \rightarrow 0$ et $u_{2q_{n+1}-1} \rightarrow 0$.

Si, par l'absurde, $\ell > 0$, on a un rang n_0 à partir duquel $v_n \geq \frac{\ell}{2}$, des rangs n_1 et n_2 à partir desquels

$$|u_{2p_{n+1}}| < \frac{\ell}{2} \text{ et } |u_{2q_{n+1}-1}| < \frac{\ell}{2} \text{ respectivement.}$$

Donc à partir du rang $N = \max(n_0, n_1, n_2)$, $v_n = |S_n - x| \geq \frac{\ell}{2}$.

Mais avec I.D.2, on a $n > N$ tel que $\frac{\ell}{2} \leq |S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}| < \frac{\ell}{2}$ ce qui est contradictoire.

On a alors finalement $v_n \rightarrow \ell = 0$.

I.D.5) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n - x| \leq v_n$, on en déduit que $S_n \rightarrow x$.

On a donc su construire, pour tout réel x , une bijection s de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$

I.E.1) De multiples démonstrations permettent classiquement d'aboutir au résultat.

On peut par exemple poser pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = H_n - \ln n$ et remarquer que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente, donc convergente, et par télescopage, u l'est, vers un

réel γ . On a donc bien $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

Reste à voir que $\gamma > 0$.

Par comparaison série-intégrale, $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante et continue sur $[1, +\infty[$, en sommant pour $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ l'inégalité $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$, on obtient $H_n \geq 1 + \int_2^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{n} = \ln n + 1 - \ln 2 + \frac{1}{n}$ donc $u_n \geq \ln\left(\frac{e}{2}\right) + \frac{1}{n}$. En passant à la limite, on tire $\gamma \geq \ln\left(\frac{e}{2}\right) > 0$.

I.E.2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = H_{2n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = H_{2n} - \frac{H_n}{2} = \ln(2n) + \gamma - \frac{\ln n}{2} - \frac{\gamma}{2} + o(1)$ donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \frac{\ln n}{2} + \ln 2 + \frac{\gamma}{2} + o(1)$.

I.E.3) a) $\forall u$ l.B, $S_n = \sum_{i=1}^n u_{s(i)}$ et $\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \sqcup \{1, 3, \dots, 2q_n-1\}$, on a bien

$$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} u_{2k} + \sum_{k=1}^{q_n} u_{2k-1} \text{ donc } S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.$$

b) En utilisant les question I.E.1 et I.E.2, on obtient alors $S_n = \frac{\ln(p_n) + \gamma + o(1)}{2} - \left(\frac{\ln q_n}{2} + \ln 2 + \frac{\gamma}{2} + o(1)\right)$ car $p_n \rightarrow +\infty$ et $q_n \rightarrow \infty$. Donc, avec $q_n = n - p_n$, $S_n = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right) - \ln 2 + o(1)$.

c) Ainsi, $\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right) \rightarrow 2(x + \ln 2)$ puis $\frac{p_n}{n-p_n} \rightarrow e^{2(x+\ln 2)} = 4e^{2x}$ donc $\frac{n-p_n}{p_n} = \frac{n}{p_n} - 1 \rightarrow \frac{e^{-2x}}{4}$ puis $\frac{n}{p_n} \rightarrow 1 + \frac{e^{-2x}}{4}$ et finalement $p_n \sim \frac{4n}{4 + e^{-2x}}$. Puis $q_n = n - p_n = n - \frac{4n}{4 + e^{-2x}} + o(n)$ donc $q_n \sim \frac{ne^{-2x}}{4 + e^{-2x}} = \frac{n}{4e^{2x} + 1}$.

d) Comme en a) et b),

$$|u_{s(1)}| + |u_{s(2)}| + \dots + |u_{s(n)}| = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1} = \frac{\ln(p_n) + \gamma + o(1)}{2} + \left(\frac{\ln q_n}{2} + \ln 2 + \frac{\gamma}{2} + o(1)\right) = \ln \sqrt{p_n q_n} + o(\ln n)$$

Mais $\sqrt{p_n q_n} \sim \frac{2n}{\sqrt{16e^{2x} + 8 + e^{-2x}}}$ d'après la question précédente, donc

$$|u_{s(1)}| + |u_{s(2)}| + \dots + |u_{s(n)}| = \ln n + o(\ln n) \sim \ln n.$$

Et $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| = H_n \sim \ln n$.

Donc $\frac{|u_{s(1)}| + |u_{s(2)}| + \dots + |u_{s(n)}|}{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|} \sim 1$ et $\frac{|u_{s(1)}| + |u_{s(2)}| + \dots + |u_{s(n)}|}{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|} \rightarrow 1$.

Ainsi, en convergence absolue, il n'y a pas de différence notable lorsque l'on change l'ordre de la sommation dans la série harmonique, contrairement à la série harmonique alternée.

Partie II - Suites vérifiant (P_1) et (P_2)

II.A - Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument. Alors, pour toute suite (u_n) bornée, $|a_n u_n| = \mathcal{O}(|a_n|)$ donc par comparaison des séries à termes positifs, $\sum a_n u_n$ est absolument convergente, donc convergente, donc (a_n) vérifie (P_1) .

II.B.1) On suppose que $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge absolument, donc elle converge, et donc, par télescopage, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite (finie).

II.B.2) Il s'agit d'une transformation d'Abel. Soit N entier naturel. En remarquant que pour $n \geq 0$, $u_n = U_n - U_{n-1}$, avec $U_{-1} = 0$,

$$\sum_{n=0}^N a_n u_n = \sum_{n=0}^N a_n (U_n - U_{n-1}) = \sum_{n=0}^N a_n U_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} U_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N.$$

Donc $\sum_{n=0}^N a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N.$

On a une suite réelle (u_n) telle que $\sum u_n$ converge. Alors (U_n) est bornée, et $|(a_n - a_{n+1}) U_n| = \mathcal{O}(|a_n - a_{n+1}|)$ est un terme général de série convergente par comparaison des séries à termes positifs, donc, par convergence absolue, $\sum (a_n - a_{n+1}) U_n$ converge et par 1), (a_n) et (U_n) convergent donc $(a_n U_n)$ converge et finalement, $\sum a_n u_n$ converge donc (a_n) vérifie (P_2) .

II.C - Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{C}$ tel que $u_n = \frac{|a_n|}{a_n}$ si $a_n \neq 0$ et $u_n = 1$ sinon.

Alors $(u_n) \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ et $\sum a_n u_n = \sum |a_n|$ diverge.

Comme la suite (u_n) est bornée, une telle suite (a_n) ne vérifie pas (P_1) .

Finalement, avec II.A,

les suites vérifiant (P_1) sont exactement les suites (a_n) telles que $\sum a_n$ converge absolument.

II.D.1) On calcule

n	0	1	2	3	4	5
p_n	0	1	2	2	2	3
ε_n	1	1/2	1/4	1/4	1/4	1/8
A_n	1	25/16	7/4	121/64	641/320	41/20

```

1 let rec exemple n =
2   match n with
3   | 0 -> [[0; 0; 1; 1.]]
4   | _ ->
5     let resultat = exemple (n - 1) in
6     match resultat with
7     | _ :: p :: eps :: A :: [] ->
8       let (p1, eps1) =
9         if A >= p then
10          (p + 1, eps /. 2.)
11         else
12          (p, eps)
13       in
14       let A1 = A +. eps *. 9 /. (4. * (float_of_int n +. 1.)) in
15       [|n ; p1 ; eps1 ; A1|] :: resultat
16 ;;

```

II.D.2) a) On suppose par l'absurde qu'il existe un rang N à partir duquel on est toujours dans la deuxième situation.

Donc pour $n \geq N$, $p_N = p_n > A_n = A_N + \sum_{k=N+1}^n a_k \varepsilon_k = A_N + \varepsilon_N \sum_{k=N+1}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ce qui est contradictoire.

Donc pour tout naturel N , il existe un entier $n > N$ tel que $p_n = 1 + p_{n-1}$.

On peut bien poser $n_0 = 0$ et si un n_k est défini pour un $k \geq 0$, $\{n \in \mathbb{N} / n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un minimum, ce qui permet de définir n_{k+1} .

Ainsi, la suite (n_k) est bien définie et, par construction, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$, donc elle est strictement croissante.

b) On montre par récurrence simple que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_{n_k} = k$ et $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$.

C'est bien vrai au rang 0 et si on se donne $k \in \mathbb{N}$ pour lequel c'est vrai, alors par définition, pour tout $n \in \llbracket n_k, n_{k+1} - 1 \rrbracket$, $p_n \neq 1 + p_{n-1}$ donc $p_n = p_{n-1}$ (2^e situation) et donc $p_n = p_{n_k} = k$ par hypothèse de récurrence.

Mais alors, toujours par définition, $p_{n_{k+1}} = 1 + p_{n_{k+1}-1} = k + 1$ (1^{re} situation).

Mais alors, avec la 2^e situation, pour tout $n \in \llbracket n_k, n_{k+1} - 1 \rrbracket$, $\varepsilon_n = \varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2^k}$ par hypothèse de récurrence et avec la 1^{re} situation, $\varepsilon_{n_{k+1}} = \frac{\varepsilon_{n_{k+1}-1}}{2} = \frac{1}{2^{k+1}}$ ce qui établit la récurrence.

On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \llbracket n_k, n_{k+1} - 1 \rrbracket$, $\varepsilon_n = \frac{1}{2^k}$ donc la suite (ε_n) est décroissante, minorée par 0 donc convergente et la suite extraite (par stricte croissance de $(n_k)_k$) $(\varepsilon_{n_k})_k = \left(\frac{1}{2^k}\right)_k$ converge vers 0 donc $\varepsilon_n \rightarrow 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour $n = n_k$, on est dans la 1^{re} situation donc $A_{n_{k-1}} \geq p_{n_{k-1}} = p_{n_k-1} = k - 1$ donc la suite $(A_{n_{k-1}})_k$ extraite de (A_n) diverge vers $+\infty$, donc

la série $\sum \varepsilon_n a_n$ diverge

car ce sont ses sommes partielles.

c) Pour l'exemple de II.D.1, vu le tableau, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ et $n_3 = 5$.

II.D.3) a)

```

1 def indexer(n):
2     L = [[0, 0]]
3     p, eps, A = 0, 1, 1
4     for j in range(1, n + 1):
5         if A >= p:
6             p += 1
7             eps /= 2
8             L.append([len(L), j])
9             A += eps / (j + 1) # ici, A contient Aj.
10    return L

```

b) Soit $k \geq 3$ un indice tel que $n_k - 2 > n_{k-1}$. Prouver l'inégalité

$$k - 1 \leq A_{n_{k-1}} \leq k - 1 + \frac{1}{2^{k-1} n_k}$$

En déduire que $n_{k+1} - 2 > n_k$.

c) Calculer explicitement la différence $A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}$ en fonction de k , n_k et n_{k+1} . En déduire, pour $k \geq 3$, l'inégalité

$$\frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1}\right) \leq A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leq \frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right).$$

d) Déduire des deux questions précédentes, pour $k \geq 3$, l'inégalité

$$2^k - \frac{2}{n_k} \leq \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right).$$

e) En utilisant une série convenable, étudier la convergence de la suite de terme général $(\ln n_k - 2^k)$; puis prouver l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$n_k \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C \exp(2^k).$$

en déduire que

$$A_{n_k} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n_k)}{\ln 2}$$

puis que

$$A_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n)}{\ln 2}.$$

Que peut-on penser de l'exécution de la fonction `indexer` ?

II.E - a) En posant, pour $n \in \mathbb{N}$, $\text{sgn}(a_n) = \frac{a_n}{|a_n|}$ si $a_n \neq 0$ et 0 sinon, et $\varepsilon'_n = \text{sgn}(a_n)\varepsilon_n$, on a $|\varepsilon'_n| \leq |\varepsilon_n|$ donc $\varepsilon'_n \rightarrow 0$ et $\sum \varepsilon_n |a_n| = \sum \varepsilon'_n a_n$ converge.

b) Par contraposée de II.D, le fait que pour toute suite (ε_n) tendant vers 0, $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge nous dit que $\sum |a_n|$ converge.

II.F.1) Supposons, par exemple, que la suite (a_n) ne soit pas majorée.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a un entier n_k tel que $a_{n_k} \geq k^2$. On peut sans perte de généralité, supposer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $n_k > n_{k-1}$ (par exemple avec une construction de la forme de celle de la question II.D.2.)

Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{k^2}$ si n est l'un des n_k et 0 sinon. Alors les sommes partielles de la série $\sum x_n$ sont les sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{k^2}$ (répétées chacune $n_{k+1} - n_k$ fois), donc par critère de Riemann, $\sum x_n$ converge.

Mais pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} a_{n_k} \geq 1$ donc la suite extraite $(x_{n_k} a_{n_k})_k$ ne converge pas vers 0 donc $\sum x_n a_n$ diverge grossièrement, ce qui est contradictoire.

On démontre de manière similaire que (a_n) est minorée. Ainsi la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

II.F.2) Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Alors, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^N \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n) = \sum_{n=0}^N \varepsilon_n a_{n+1} - \sum_{n=0}^N \varepsilon_n a_n = \sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_{n-1} a_n - \sum_{n=0}^N \varepsilon_n a_n = \varepsilon_N a_{N+1} - \varepsilon_0 a_0 + \sum_{n=1}^N (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) a_n$$

avec $\varepsilon_N a_{N+1} \rightarrow 0$ car (a_n) est bornée, et la série télescopique $\sum (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)$ converge car $\varepsilon_n \rightarrow 0$, donc par hypothèse la série $\sum (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) a_n$ converge.

Ainsi, avec la formule ci-dessus, la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$ converge.

II.F.3) La question précédente et la question II.E permettent de conclure directement que

la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.F.4) Les questions II.B et la question précédente permettent de conclure que

Les suites vérifiant (P_2) sont les suites $(a_n)_n$ telles que $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

Fin