Mines PSI 2
La formule du triple produit de Jacobi

1 Préambule.

Q.1. Commençons par justifier informellement la formule. Si on développe le produit dans le membre de gauche on voit apparaître une somme de 2^n termes. L'un d'entre eux vaut 1 est s'annule avec le -1. Il reste une somme de $2^n - 1$ termes. Si on applique l'inégalité triangulaire, on obtiendra un majorant qui est exactement celui demandé.

On peut formaliser, comme il est demandé, en procédant par récurrence sur n.

- Initialisation : pour $n = 1$, le résultat de lit $|\zeta_1| \leq |\zeta_1|$ et est objectivement vrai.
- Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang n. En notant $A_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\zeta_k)$, on a

$$|A_{n+1} - 1| = |(1+\zeta_{n+1})A_n - 1| \leq |A_n - 1| + |\zeta_{n+1}A_n|$$

On utilise alors l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |A_{n+1} - 1| &\leq \prod_{k=1}^{n}(1+|\zeta_k|) - 1 + |\zeta_{n+1}| \prod_{k=1}^{n} |1+\zeta_k| \\ &= (1+|\zeta_{n+1}|) \prod_{k=1}^{n}(1+|\zeta_k|) - 1 \\ &= \prod_{k=1}^{n+1}(1+|\zeta_k|) - 1 \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.

2 La formule de Jacobi.

Q.2. Posons $u_n = \prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k})$. (u_n) est une suite à termes strictement positifs et $u_{n+1}/u_n = (1-x^{2n+2}) < 1$. (u_n) est ainsi une suite décroissante et minorée par 0. Par théorème de limite monotone, elle converge et $Q(x)$ existe bien.

Q.3. Posons $v_n = \prod_{k=1}^{n} \rho_k$. Distinguons deux cas.

- Si $\exists\, k_0 /\ \rho_{k_0} = 0$ alors (v_n) est nulle à partir d'un certain rang et converge donc.
- Sinon, (v_n) est à termes strictement positifs et $\ln(v_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(\rho_k)$. Par inégalité triangulaire, on a

$$1 - |z^2||x|^{2k-1} \leq \rho_k \leq 1 + |z^2||x|^{2k-1}$$

Comme $|x| < 1$, ces termes sont strictement positifs pour k assez grand ($k \geq k_0$) et, par croissance du logarithme,

$$\ln(1 - |z^2||x|^{2k-1}) \leq \ln(\rho_k) \leq \ln(1 + |z^2||x|^{2k-1})$$

Majorant et minorant étant $O(|z^2||x|^{2k-1})$ quand $k \to +\infty$ (car $\ln(1+t) = O(t)$ quand $t \to 0$) on a donc aussi $\ln(\rho_k) = O(|z^2||x|^{2k-1}) = O(|x|^{2k})$ qui est le terme général d'une série absolument convergente (comparaison à une série géométrique qui l'est). Ainsi, $\sum(\ln(\rho_k))$ converge ou encore $(\ln(v_n))$ converge. Par continuité de la fonction exponentielle, (v_n) converge aussi.

Le produit $\prod_{k=1}^{\infty} \rho_k$ est ainsi toujours convergent.

Q.4. Dans cette question, on choisit d'écrire z sous forme trigonométrique, c'est-à-dire sous la forme $z = re^{i\theta}$ (avec $r > 0$ puisque $z \neq 0$).

Comme $|x| < 1$, $z_k = 1 + z^2x^{2k-1} \to 1$. En particulier, il existe un rang k_0 à partir duquel $\Re(z_k) > 0$ (puisque $\Re(z_k) \to 1$). On a alors

$$\forall k \geq k_0,\ \theta_k = \arctan\left(\frac{r^2x^{2k+1}\sin(2\alpha)}{1 + r^2x^{2k-1}\cos(\alpha)}\right)$$

Le terme dans arctan est de limite nulle et on a donc

$$\theta_k \sim \frac{r^2x^{2k+1}\sin(2\alpha)}{1 + r^2x^{2k-1}\cos(\alpha)} \sim r^2x^{2k+1}\sin(2\alpha)$$

$\sum(\theta_k)$ est donc une série absolument convergente (comparaison à une série géométrique).

Q.5. Posons $h_n = \prod_{k=1}^{n}(1+z^2x^{2k-1})$; on a

$$h_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\rho_k\right).e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\prod_{k=1}^{\infty}\rho_k\right).e^{i\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k}$$

et $H(x,z)$ existe donc (le produit qui définit cette quantité converge).

Q.6. On utilise la propriété $\forall u \in \mathbb{R},\ 1+u \leqslant e^u \leqslant e^{|u|}$ qui se démontre par une simple étude de fonction.
On a donc, en appliquant l'inégalité (1) avec $\zeta_k = -x^{2k}$:
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,1[,\ \left|\prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k})-1\right| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+|x|^{2k})-1 \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{|x|^{2k}}-1 \leqslant \prod_{k=1}^{+\infty} e^{|x|^{2k}}-1$
$\Rightarrow \left|\prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k})-1\right| \leqslant e^{\frac{x^2}{1-x^2}}-1.$

Par passage à la limite quand n tend vers l'infini, on trouve : $|Q(x)-1| \leqslant e^{\frac{x^2}{1-x^2}}-1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par continuité de la fonction exponentielle en 0.

Q.7. On suppose que $x \neq 0$ (et toujours $|x|<1$) pour pouvoir écrire $F(x,xz)$. On a

$$F(x,xz) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+z^2x^{2k+1})\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^{-2}x^{2k-3})$$

Dans le second produit, on veut isoler le terme pour $k=1$. Il convient de justifier que l'on en a le droit. Pour $n \geq 2$, on a

$$\prod_{k=1}^{n}(1+z^{-2}x^{2k-3}) = (1+z^{-2}x^{-1})\prod_{k=2}^{n}(1+z^{-2}x^{2k-3})$$

Chacun des produits infinis existe (même chose qu'en question 5) et on peut passer à la limite...On réindice alors le produit obtenu pour obtenir

$$F(x,xz) = (1+z^{-2}x^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^2x^{2k+1})\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^{-2}x^{2k-1})$$

*Remarque : même si $\prod_{k=1}^{\infty}a_k$ existe, on n'a pas toujours le droit d'écrire que ce produit est égal à $a_1\prod_{k=2}^{\infty}a_k$. Il faut en effet s'assurer que le nouveau produit infini qui apparaît existe. Si $a_i=(i-1)$, on obtient un contre-exemple puisque $\prod_{k=1}^{\infty}(k-1)$ existe et est nul alors que $\prod_{k=2}^{\infty}(k-1)$ n'existe pas (les produits partiels valent $n!$ et tendent vers l'infini).**
On remarque que $1+z^{-2}x^{-1} = \frac{z^2x+1}{z^2x}$. Avec un "produit en croix", on en déduit que

$$z^2xF(x,xz) = (1+z^2x)\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^2x^{2k+1})\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^{-2}x^{2k-1})$$

On regroupe les deux premiers termes (dans ce sens, pas de problème...) et on réindice le produit pour conclure que

$$xz^2F(x,xz) = F(x,z)$$

Q.8. Comme $0^k=0$ pour tout entier $k\geq 1$, on a immédiatement

$$F_1(x,0) = a_0(x)$$

De même, en remarquant que

$$\forall z\neq 0,\ \frac{F_1(x,z)-F_1^n(x,z)}{z^{n+1}} = a_n(x)+\sum_{k\geq 1}a_{k+n+1}(x)z^k$$

on obtient (les quantités écrites existent car la série entière est de rayon infinie et on a donc convergence absolue pour tout z)

$$\forall z\neq 0,\ \left|\frac{F_1(x,z)-F_1^n(x,z)}{z^{n+1}}-a_n(x)\right| \leq \sum_{k\geq 1}|a_{k+n+1}(x)|.|z|^k = G(|Z|)$$

G est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme de série entière. Elle est donc continue en 0 et $G(t)\mapsto G(0)=0$ quand $t\to 0$. Par composition des limites, on a donc $G(|z|)\to 0$ quand $z\to 0$ et ainsi

$$a_{n+1}(x) = \lim_{z\to 0}\frac{F_1(x,z)-F_1^n(x,z)}{z^{n+1}}$$

Q.9. Supposons $F(x,z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k(x)z^k$ pour tout $|x|<1$ et tout $z\in\mathbb{C}^*$ où F est définie par (4). Posons

$$G_1(x,z)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k(x)z^k \quad \text{et} \quad G_2(x,z)=\sum_{k=1}^{\infty} d_k(x)z^k$$

On a alors $F(x,z)=G_1(x,z)+G_2(x,z^{-1})$ et, pour x fixé, $G_1(x,\xi)$ et $G_2(x,\xi)$ sont les sommes respectives de deux séries entières de rayon de convergence infini. L'unicité ADMISE par l'énoncé indique que $F_1=G_1$ et que $F_2=G_2$.
$x\in]-1,1[$ étant fixé, on montre par récurrence que $\forall k\in\mathbb{N},\ a_k(x)=d_k(x)$.

- Initialisation : le procédé de la question 8 (utilisé deux fois) montre que $a_0(x)=F_1(x,0)=G_1(x,0)=d_0(x)$. Le résultat est donc vrai au rang 0.
- Hérédité : soit $n\geq 0$; supposons le résultat vrai jusqu'au rang n. En particulier, on a

$$\forall z,\ F_1^n(x,z)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x)z^k=\sum_{k=0}^{n} d_k(x)z^k=G_1^n(x,z)$$

Le procédé de la question 8 (utilisé deux fois) montre que

$$a_{n+1}(x)=\lim_{z\to 0}\frac{F_1(x,z)-F_1^n(x,z)}{z^{n+1}}=\lim_{z\to 0}\frac{G_1(x,z)-G_1^n(x,z)}{z^{n+1}}=d_{n+1}(x)$$

et l'hypothèse est donc encore vraie au rang $n+1$.

On peut faire le même travail avec F_2 et G_2 en lieu et place de F_1 et G_1 pour obtenir $\forall k\in\mathbb{N},\ a_{-k}(x)=d_{-k}(x)$. On a finalement prouvé que

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ a_k(x)=d_k(x)$$

Q.10. Pour tout complexe z, $(-z)^2=z^2$ et donc quand $|x|<1$ et $z\neq 0$, $F(x,z)=F(x,-z)$. Ainsi

$$\forall |x|<1,\ \forall z\in\mathbb{C}^*,\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(x)z^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k a_k(x)z^k$$

L'unicité prouvé à la question précédente indique que $\forall k,\ a_k=(-1)^k a_k$ et les fonctions a_{2m+1} sont nulles pour tout entier relatif m. Finalement,

$$\forall |x|<1,\ \forall z\in\mathbb{C}^*,\ F(x,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{2m}(x)z^{2m}$$

et il suffit de poser $b_m=a_{2m}$ pour obtenir la formule désirée.

Q.11. En utilisant la question 7, on obtient simplement

$$\forall x\in]-1,1[\backslash\{0\},\ \forall z\in\mathbb{C}^*,\ F(x,z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x^{2k-1}b_{k-1}(x)z^{2k}$$

On a envie d'utiliser l'unicité prouvée en question 9. On n'est cependant pas dans le même cadre car ici l'égalité n'est pas valable pour $x=0$. Il reste à voir si cela est problématique...En question 9, on a travaillé à x FIXE mais seulement après justifié que $F_1=G_1$ et $F_2=G_2$. Ces égalités proviennent, elles, du résultat admis par l'énoncé. Or, celui-ci ne dit pas si l'unicité admise est vraie pour tout x fixé ou si elle n'est vraie que si l'égalité a lieu pour tout $x\in]-1,1[$. Il faut certainement supposer que c'est la première situation qui est la bonne, ce que je fais désormais. Je peux alors utiliser la question 9 pour justifier que

$$\forall x\in]-1,1[\backslash\{0\},\ \forall k\in\mathbb{Z},\ b_k(x)=b_{k-1}(x)x^{2k-1}$$

Q.12. On a immédiatement $\forall |x|<1,\ \forall z\in\mathbb{C}^*,\ F(x,z)=F(x,z^{-1})$ et donc

$$\forall |x|<1,\ \forall z\in\mathbb{C}^*,\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(x)z^{2k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(x)z^{-2k}$$

Un changement d'indice dans la seconde somme donne

$$\forall |x|<1,\ \forall z\in\mathbb{C}^*,\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(x)z^{2k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{-k}(x)z^{2k}$$

et la question 9 donne alors

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ \forall |x|<1,\ b_k(x)=b_{-k}(x)$$

La question 11 et une récurrence assez simple montrent que

$$\forall m\in\mathbb{N},\ b_m(x)=b_0(x)x^{\sum_{k=1}^{m}(2k-1)}$$

On a aussi $\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=2\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)-m=m(m+1)-m=m^2$ et finalement

$$\forall m\in\mathbb{N},\ b_m(x)=b_0(x)x^{(m^2)}$$

La propriété de "parité" vue en début de question donne alors

$$\forall m\in\mathbb{Z},\ b_m(x)=b_0(x)x^{(m^2)}$$

Q.13. Fixons $x\in]-1,1[$ et $z\in\mathbb{C}^*$. L'inégalité (1) donne

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\prod_{k=1}^{n}(1+z^2x^{2k-1})-1\right|\leq\prod_{k=1}^{n}(1+|z^2x^{2k-1}|)-1$$

On montre comme en question 3 que les produits infinis convergent et on peut passer à la limite $n\to+\infty$ pour obtenir

$$|H(x,z)-1|\leq\prod_{k=1}^{\infty}(1+|z^2x^{2k-1}|)-1$$

On travaille alors exactement comme en question 6 pour justifier l'interversion entre la limite $x\to 1$ et le produit du membre de droite. Ce membre de droite est de limite nulle et on a donc

$$\lim_{x\to 0}H(x,z)=1$$

Q.14. On a en particulier $F(x,1)=H(x,1)^2\to 1$ quand $x\to 0$. Or,

$$\forall x\in]-1,1[,\ F(x,1)=b_0(x)\sum_{m=-\infty}^{\infty}x^{m^2}=b_0(x)(1+2\sum_{m=1}^{\infty}x^{m^2})$$

La somme dans le membre de droite est une somme de série entière et est donc une fonction C^∞ de x sur $]-1,1[$. Elle est, en particulier, continue en 0 et tend vers 0 (sa valeur en 0) quand $x\to 0$. On a finalement

$$\lim_{x\to 0}b_0(x)=1$$

Q.15. Formellement, on a

$$\begin{aligned}
P(x,\eta) &= \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{2k})\prod_{k=1}^{\infty}(1+ix^{2k-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-ix^{2k-1})\\
&= \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{2k})\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{4k-2}) \text{ regrouper les deux derniers produits}\\
&= \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{4k})\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{4k-2})\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{4k-2}) \text{ scinder le premier produit}
\end{aligned}$$

La justification des égalités avec des produits infinis se fait en réalité en revenant à des produits finis puis en passant à la limite comme à la question 7.

Q.16. De la même façon (et en continuant)

$$\begin{aligned} P(x,\eta) &= \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{4k})\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{8k-4}) \text{ regrouper les deux derniers produits} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{8k})\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{8k-4})\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{8k-4}) \text{ scinder le premier produit} \\ &= P(x^4,i) \end{aligned}$$

Q.17. En utilisant l'expression de $F(x,z)$ avec les b_k et la valeur de ceux-ci, on a aussi

$$P(x,z) = Q(x)b_0(x)\sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2}z^{2m}$$

L'égalité de la question précédente donne ainsi

$$c_0(x)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^p x^{4p^2} + ic_0(x)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^p x^{(2p+1)^2} = c_0(x^4)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^p x^{4p^2}$$

égalité valable pour tout $x \in]-1,1[$.
c_0 étant à valeurs complexes, il n'est pas encore possible de conclure en identifiant les parties réelle et imaginaire. Il nous faut d'abord justifier que pour tout $x \in]-1,1[$ on a $c_0(x) \in \mathbb{R}$ ou encore que $b_0(x) \in \mathbb{R}$.
On rappelle que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ F(x,z) = b_0(x)\sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2}z^m$$

- Si $x \in [0,1[$, on choisit $z=1$. On a $F(x,1) \in \mathbb{R}$ (définition de F) et donc

$$b_0(x)(1+2\sum_{m=1}^{\infty} x^{m^2}) \in \mathbb{R}$$

  Comme $1+2\sum_{m=1}^{\infty} x^{m^2} > 0$ (et donc $\neq 0$) on a donc $b_0(x) \in \mathbb{R}$.
- Si $x \in]-1,0[$, on conclut de même en considérant $z=-1$.

On peut maintenant conclure que

$$\forall x \in]-1,1[,\ c_0(x) = c_0(x^4)$$

Q.18. En itérant la formule de la question précédente on obtient

$$\forall x \in]-1,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ c_0(x) = c_0(x^{(4^n)})$$

ce qui se prouve de manière immédiate par récurrence. x étant fixé dans $]-1,1[$, $(x^{(4^n)})$ est de limite nulle quand $n \to +\infty$. Comme c_0 tend vers 1 en 0 (c'est le cas pour Q et b_0), le théorème de composition des limites donne

$$\forall x \in]-1,1[,\ c_0(x) = 1$$

On en déduit (avec l'expression de $P(x,z)$ donnée en question 17) que

$$P(x,z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2}z^{2m}$$

En revenant à l'expression de définition de P, on a finalement

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{2k})\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^2x^{2k-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^{-2}x^{2k-1}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2}z^{2m}$$

3 Le nombre de partitions d'un entier.

Q.19. Soit $t \in]0,1[$; $x = t^{3/2} \in]0,1[$ et $-\sqrt{t} \neq 0$ admet une racine carrée complexe $z \neq 0$ (qui vérifie donc $z^2 = -t^{1/2}$). En appliquant la formule du triple produit avec ces x et z obtient

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-t^{3m})\prod_{m=1}^{\infty}(1-t^{3m-1})\prod_{m=1}^{\infty}(1-t^{3m-2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m t^{(3m^2+m)/2}$$

et il suffit de regrouper les produit (c'est le sens où cela ne pose pas de problème) pour en déduire la formule (7).

Q.20. Montrons que f réalise une bijection de S_2 dans S_1.

- Supposons $(q_1,\dots,q_n) \in S_2$ et posons $(r_1,\dots,r_n) = f(q_1,\dots,q_n)$. On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} r_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} q_i\right)$$

On intervertit les deux sommes ($\{(i,j)/\ j \in [1,n],\ i \in [j,n]\} = \{(i,j)/\ i \in [1,n],\ j \in [1,i]\}$) pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{n} r_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} q_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(iq_i) = n$$

De plus, les r_i sont dans $\mathbb{N}$ et vérifient $r_j - r_{j+1} = q_j \geq 0$ pour $j = 1, n-1$ et donc $(r_1,\dots,r_n) \in S_1$. f envoie donc un élément de S_2 sur un élément de S_1.

- Soit $(r_1,\dots,r_n) \in S_1$; si $f(q_1,\dots,q_n) = (r_1,\dots,r_n)$ alors $\forall j,\ r_j = \sum_{j=i}^{n} q_j$ et donc

$$r_n = q_n \ \text{ et } \ \forall i \in [1,n-1],\ r_j - r_{j+1} = q_j$$

On a donc au plus un antécédent pour $(r_1,\dots,r_n)$ par f. Réciproquement, si on pose $(q_1,\dots,q_n)$ comme ci-dessus on a (télescopage)

$$\forall i \in [1,n],\ \sum_{j=i}^{n} q_j = \sum_{j=i}^{n-1}(r_j - r_{j+1}) + r_n = r_j$$

et $f(q_1,\dots,q_n) = (r_1,\dots,r_n)$ (les q_j sont bien des éléments de n puisque les r_i sont ordonnés). Enfin

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} jq_j &= nr_n + \sum_{j=1}^{n-1} j(r_j - r_{j+1}) \\
&= nr_n + \sum_{j=1}^{n-1} jr_j - \sum_{j=1}^{n-1} jr_{j+1} \\
&= nr_n + \sum_{j=1}^{n-1} jr_j - \sum_{j=2}^{n}(j-1)r_j \\
&= nr_n + r_1 + \sum_{j=2}^{n-1} r_j - (n-1)r_n \\
&= \sum_{j=2}^{n-1} r_j = n
\end{aligned}$$

et $(q_1,\dots,q_n) \in S_2$.

Deux ensembles en bijection ayant même cardinal, on a prouvé que

$$\text{card}(S_1) = \text{Card}(S_2)$$

Q.21. Quand on développe le produit proposé, on obtient $n(n+1)$ termes du type $t_{i_1}t_{2i_2}\dots t_{ni_n} = t^{\sum_{k=1}^{n} ki_k}$ où chaque i_j est choisi entre 0 et n. Notre produit est la somme de tous les termes de ce type. Parmi ces $n(n+1)$ termes, il y en a autant égaux à t^n que de choix des i_k entre 0 et n tels que $\sum_{k=1}^{n} ki_k = n$. La contrainte $i_k \leq n$ n'en est pas une car dans l'équation (9), les q_j sont nécessairement $\leq n$ (on ne retranche donc pas de solutions en imposant $q_j \leq n$). Il y a donc $\text{card}(S_2) = \text{card}(S_1) = p(n)$ termes égaux à t^n et $p(n)$ est donc le coefficient de t^n dans le développement proposé.

Q.22. En reprenant le raisonnement de la question précédente,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} p(k)\, t^k + \sum_{k=n+1}^{n^2} \alpha_{n,k}\, t^k$$

avec $\forall k \in [\![n+1, n^2]\!],\ 0 \leqslant \alpha_{n,k} \leqslant p(k)$.
Pour $t \in [0,1]$, les coefficients étant tous positifs, on a

$$1 + \sum_{k=1}^{n} p(k)\, t^k \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p(k)\, t^k$$

Donc $\forall t \in [0,1],\ \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=0}^{n} t^{ik}\right) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} p(k)\, t^k$.

$$\begin{aligned}
\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} p(k)t^k\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m t^{(3m^2+m)/2}\right) - 1 &\underbrace{=}_{Q19.} \lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n} t^{ik}\right)\prod_{m=0}^{\infty}(1-t^m) - 1 \\
&= \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-(t^k)^{n+1}}{1-t^k}\prod_{m=1}^{\infty}(1-t^m) - 1 \\
&= \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-t^{(k(n+1))})\prod_{m=n+1}^{\infty}(1-t^m) - 1
\end{aligned}$$

En reprenant l'inégalité (1) par passage à la limite,

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{k=1}^{n}(1-t^{(k(n+1))})\prod_{m=n+1}^{\infty}(1-t^m) - 1\right| &\leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+t^{(k(n+1))})\prod_{m=n+1}^{\infty}(1+t^m) - 1 \\
&\leqslant \prod_{k=1}^{n}\exp(t^{(k(n+1))})\prod_{m=n+1}^{\infty}\exp(t^m) - 1 \\
&\leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} t^{(k(n+1))}\right)\exp\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} t^m\right) - 1 \\
&\leqslant \exp\left(\frac{t^{n+1}-t^{(n+1)^2}}{1-t^{n+1}}\right)\exp\left(\frac{t^{n+1}}{1-t}\right) - 1
\end{aligned}$$

Or $\forall t \in [0,1[,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t^{n+1}-t^{(n+1)^2}}{1-t^{n+1}} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$ et $\lim\limits_{u\to 0}\exp(u) = 1$, par composition et produit de limites, on trouve $\forall t \in [0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty}\exp\left(\frac{t^{n+1}-t^{(n+1)^2}}{1-t^{n+1}}\right)\exp\left(\frac{t^{n+1}}{1-t}\right) - 1 = 0 = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-t^{(k(n+1))})\prod_{m=n+1}^{\infty}(1-t^m) - 1.$$

$$\underline{\text{conclusion}} : \boxed{\forall t \in [0,1[,\ \left(1+\sum_{k=1}^{\infty} p(k)t^k\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m t^{(3m^2+m)/2}\right) = 1}$$

Q.23. Quand on effectue formellement le produit dans l'expression ci-dessus (et on admettra, comme dans le produit de Cauchy, que c'est possible quand notre identité a lieu $\forall t \in [0,1/2[$) et si on ne s'intéresse qu'aux puissances ≤ 7, on peut se contenter de travailler pour $k \leq 7$ et $|m| \leq 2$. La partie de degré ≤ 7 vaut alors

$$1 + (p(1)-1)t + (p(2)-p(1)-1)t^2 + (p(3)-p(2)-p(1))t^3 + (p(4)-p(2)-p(3))t^4$$

$$+(p(5)-p(4)-p(3)+1)t^5 + (p(6)-p(5)-p(4)+p(1))t^6 + (p(7)-p(6)-p(5)+p(2)+1)t^7$$

Les coefficients de t^k pour $k \geq 1$ devant être nuls, on obtient un système dont la résolution donne

$$p(1) = 1,\ p(2) = 2,\ p(3) = 3,\ p(4) = 5,\ p(5) = 7,\ p(6) = 11,\ p(7) = 15$$