Programme de colle – MPI

1. Suites et séries de fonctions numériques d'une variable réelle,

Extrait du programme officiel :

Les fonctions sont définies sur une partie de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur A, alors u est continue en a. En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.	Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}\ell$.	La démonstration est hors programme. Adaptation, si $A\subset\mathbb{R}$, aux cas où $a=+\infty$ et $a=-\infty$.
e) Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions.	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme.	La convergence normale implique la convergence absolue en tout point. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.
f) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier. Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible.

On introduit la notion de norme uniquement pour manipuler la norme ∞ pour le moment.

L'intégration et la dérivation des suites et séries de fonctions seront traitées plus tard.

L'approximation uniforme par des fonctions en escaliers n'a pas encore été (re)démontrée. Elle le sera avec les révisions sur la continuité uniforme.

2. Révisions d'algèbre linéaire de MP2I

Voir programme page suivante.

Semaine prochaine : Révisions et compléments d'algèbre linéaire, révisions sur les polynômes et les fractions rationnelles.

3. Questions de cours

(i) Si $k\geqslant 0$ et A partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, $\sup(kA)=k\sup A$.
La norme ∞ sur un espace de fonctions bornées est une norme.

(ii) **Fonction ζ de Riemann**
Définition, convergence simple, normale, variations, limite en $+\infty$, équivalent et limite en 1, absence de convergence uniforme au voisinage de 1, tracé.

(iii) Théorème du rang.

(iv) **CCINP 8, 9, 11, 12, 15, 17, 18 (modifié), 53, 62, 64**

4. Exercices CCINP

- **CCINP 8 :**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.
   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.
   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.
2. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

- **CCINP 9**

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x)=\dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}x\right)$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
   (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
   (c) Soit $a>0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?
   (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

- **CCINP 11**

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $\big(f_n(x_n)-f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0,+\infty[$.

- **CCINP 12**

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0\in[a,b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0;1]$, $g_n(x)=x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

- **CCINP 15** : Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!}z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R\in\mathbb{R}_+^*$?

- **CCINP 17** : Soit $A\subset\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur } A\right)$$

2. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[0;+\infty[$, $f_n(x)=nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
   $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

- **CCINP 18 (modifié)** : On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x\in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (b) Sur quels type d'intervalles y a-t-il convergence normale ?
   (c) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0,1]$
   (d) La fonction S est-elle continue sur D ?

- **CCINP 53** : On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On pose alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
   (b) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $0<a<b$. $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?
   (c) $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

- **CCINP 62** : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^2-f-2\,\mathrm{id}=0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E=\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})\oplus\mathrm{Ker}\,(f-2\,\mathrm{id})$:
   (a) **(5/2)** en utilisant le lemme des noyaux ;
   (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f+\mathrm{id})=\mathrm{Ker}\,(f-2\,\mathrm{id})$.

- **CCINP 64** : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E=\mathrm{Im}\,f\oplus\mathrm{Ker}\,f\Longrightarrow\mathrm{Im}\,f=\mathrm{Im}\,f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im}\,f=\mathrm{Im}\,f^2\Longleftrightarrow\mathrm{Ker}\,f=\mathrm{Ker}\,f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im}\,f=\mathrm{Im}\,f^2\Longrightarrow E=\mathrm{Im}\,f\oplus\mathrm{Ker}\,f$.

5. Algèbre linéaire (MP2I)

Extrait du programme officiel :

A. Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Notations $\mathrm{Vect}(A)$, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\mathrm{Vect}(A)$.
c) Familles de vecteurs	
Famille (partie) génératrice.	
Famille (partie) libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

B. Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité. Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

C. Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	
Noyau d'une application linéaire.	Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u\in\mathcal{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}\,u=\mathrm{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\mathrm{rg}(u)$.
Le rang de $v\circ u$ est majoré par $\min(\mathrm{rg}(u),\mathrm{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties.	Notations id_E, id.
Anneau $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$.	Non commutativité si $\dim E\geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v\circ u$. Notation u^k pour $u\in\mathcal{L}(E)$ et $k\in\mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2=p$, par $s^2=\mathrm{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$. Notation u^k pour $u\in\mathrm{GL}(E)$ et $k\in\mathbb{Z}$.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u\in\mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i\in I$, $u(e_i)=f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.	
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E=E_1\oplus E_2$, si $u_1\in\mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2\in\mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u\in\mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	
d) Théorème du rang	
Forme géométrique du théorème du rang : si $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.	
Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u\in\mathscr{L}(E,F)$, alors $n=\dim\operatorname{Ker} u+\operatorname{rg}(u)$.	
e) Formes linéaires et hyperplans	
Forme linéaire.	Formes coordonnées relativement à une base.
Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle.	Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E=H\oplus D$.	
Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.	En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.	
Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.	Système d'équations d'un sous-espace vectoriel ; cas des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, des droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'étude de la dualité est hors programme.

D. Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Contenus	Capacités & commentaires
Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : points et vecteurs. Translation.	L'écriture $B=A+\vec{u}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.
Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction. Hyperplan affine.	Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Intersection de sous-espaces affines.	
Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x)=a$ où $u\in\mathscr{L}(E,F)$, $a\in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\operatorname{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques, la recherche de polynômes interpolateurs.