

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1995

MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
OPTIONS M ET P'
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I.

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 4 pages.

Ce problème est consacré à l'étude de suites complexes périodiques. Par définition, une suite complexe $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique si et seulement s'il existe un entier naturel p , différent de 0, tel que, pour tout entier naturel n , l'égalité

$$u_{n+p} = u_n$$

a lieu. L'entier p est appelé période de la suite U . Soit \mathcal{P} l'ensemble de ces suites.

La première et la deuxième partie définissent les applications linéaires L, D, θ, S et les sous-espaces vectoriels \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 de l'espace vectoriel \mathcal{P} . Elles étudient les noyaux et les espaces images de ces applications. La troisième partie s'intéresse à leur continuité.

Première partie.

Désignons par \mathcal{B} l'ensemble des suites complexes $V = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornées. Admettons que \mathcal{B} soit un espace vectoriel complexe et que l'application de \mathcal{B} dans \mathbb{R} , $V \mapsto \|V\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |v_n|$, soit une norme.

I-1°) Premières propriétés de l'ensemble \mathcal{P} des suites complexes périodiques :

- a. Désignons par $\mathcal{T}(U)$ l'ensemble des périodes d'une suite complexe périodique U . Démontrer l'existence d'une plus petite période p_0 ; caractériser l'ensemble $\mathcal{T}(U)$. Déterminer les ensembles $\mathcal{T}(\Omega)$ et $\mathcal{T}(C)$ relatifs aux deux suites définies ci-dessous :

$$\Omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ pour tout } n, \omega_n = 1; C = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ pour tout } n, c_n = \Re i^{n+1}.$$

- b. Démontrer que l'ensemble \mathcal{P} des suites complexes périodiques est un sous-espace vectoriel de l'espace \mathcal{B} .
- c. Cet espace vectoriel \mathcal{P} est-il de dimension finie ?

Étant donné une suite U de \mathcal{P} et deux entiers naturels p et n , désignons par $A(U, p, n)$

$$\text{le nombre complexe défini par la relation : } A(U, p, n) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k}.$$

I-2°) Décomposition de \mathcal{P} en somme directe.

- a. Démontrer que pour une suite U donnée de \mathcal{P} , le nombre complexe $A(U, p, n)$ ne dépend ni de l'entier naturel n , ni de la période p de U (p appartient à $\mathcal{T}(U)$).

Pour une suite U donnée de \mathcal{P} , soit $L(U)$ la valeur commune de ces nombres complexes $A(U, p, n)$; désignons par L la forme linéaire : $U \mapsto L(U)$.

- b. Calculer $L(\Omega)$ et $L(C)$; Ω et C sont les suites définies à la question **I- 1° a.**
- c. Soit \mathcal{P}_0 le noyau de la forme linéaire L . Soit \mathcal{P}_1 le sous-espace vectoriel engendré par la suite Ω définie à la question **I- 1° a.**; démontrer que l'espace vectoriel \mathcal{P} est égal à la somme directe des deux sous-espaces vectoriels \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 : $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_1$.

I-3°) Étude d'un endomorphisme D_0 de \mathcal{P}_0 .

À tout élément $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{P} , associons la suite $U' = (u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u'_n = u_{n+1} - u_n.$$

- a. Démontrer que, pour tout U de \mathcal{P} , la suite U' appartient à \mathcal{P} . Soit D l'application : $U \mapsto U'$; établir que D est un endomorphisme de \mathcal{P} . Déterminer les images $D(\Omega)$ et $D(C)$ des suites définies à la question **I-1° a.** Quels sont les noyau et espace image de l'endomorphisme D ?
- b. Démontrer que le sous-espace vectoriel \mathcal{P}_0 est stable par D et que la restriction de D à \mathcal{P}_0 est un automorphisme, qui est noté D_0 .
- c. Déterminer toutes les valeurs propres de cet automorphisme D_0 de \mathcal{P}_0 ; préciser des éléments de \mathcal{P}_0 qui sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

I-4°) Étude d'une application linéaire de \mathcal{P}_0 dans \mathcal{P} .

À tout élément $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{P} , associons la suite $U^* = (u_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n^* = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- a. Démontrer que l'application $\theta : U \mapsto U^*$ est une application linéaire de \mathcal{P}_0 dans \mathcal{P} .
- b. Déterminer le noyau et l'espace image de cette application linéaire θ .

Deuxième partie

Soient $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de \mathcal{P} et α un réel supérieur ou égal à 1. L'objet de cette partie est d'étudier la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{n^\alpha}$, $n \geq 1$, et de considérer la forme linéaire S qui, à un élément U de \mathcal{P}_0 , associe le nombre complexe $S(U)$ défini par la relation : $S(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$.

II-1°) Soient $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de \mathcal{P} et α un réel strictement supérieur à 1. Quelle est la nature de la série de terme général u_n , $n \in \mathbb{N}$? Quelle est celle de la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{n^\alpha}$, $n \geq 1$?

II-2°) Soit $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de \mathcal{P} de période p ; supposons le réel α égal à 1; pour étudier la convergence de la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{n}$, $n \geq 1$, considérons les nombres complexes w_k , $k \geq 1$, définis par la relation :

$$w_k = v_{kp} + v_{kp+1} + \cdots + v_{kp+p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{u_j}{kp+j}.$$

- a. En supposant les deux entiers p et j donnés ($p > 0$, $j \geq 0$), déterminer le développement limité à l'ordre 2 par rapport à $\frac{1}{k}$ de l'expression $\frac{1}{kp+j}$, lorsque l'entier k croît indéfiniment.
- b. En déduire la nature de la série de terme général w_k , $k \geq 1$, lorsque la suite U appartient à \mathcal{P} sans appartenir à \mathcal{P}_0 puis, lorsque la suite U appartient à \mathcal{P}_0 .
- c. En déduire la nature de la série de terme général v_n , $n \geq 1$; discuter sa convergence suivant que la suite U appartient ou non à l'ensemble \mathcal{P}_0 .

Désormais, désignons par S la forme linéaire qui, à une suite U appartenant à \mathcal{P}_0 , fait correspondre le réel $S(U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$.

II-3°) Deux exemples :

a. Soit $C = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie à la question **I-1° a**. Calculer $S(C)$. Une méthode, parmi d'autres, consiste à utiliser la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } k, \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}.$$

b. Soit $T = (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de période p , dont les termes $t_n, n \in \mathbb{N}$, sont définis par les relations :

pour tout entier r compris entre 1 et $p-1, 1 \leq r \leq p-1, t_r = 1; t_p = 1-p$.

Déterminer $S(T)$ en supposant connu le résultat : il existe une constante γ telle que :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1), \text{ lorsque l'entier } n \text{ croît indéfiniment.}$$

Troisième partie

D'après les résultats admis et la question **I-1° b**, le couple $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\infty})$ est un espace vectoriel normé. Le sous-espace vectoriel \mathcal{P}_0 de \mathcal{P} est muni de la même norme. L'objet de cette partie est d'étudier la continuité des applications linéaires L, D, θ et S . Rappelons que, si T est une application lipschitzienne d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ dans un espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|_F)$, sa norme est définie par la relation :

$$\|T\| = \sup_{x \in E} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

III-1°) Démontrer que la forme linéaire L est lipschitzienne. Déterminer sa norme. Le sous-espace vectoriel \mathcal{P}_0 est-il fermé dans \mathcal{P} ?

III-2°) Cette application linéaire D de \mathcal{P} dans lui-même est-elle lipschitzienne ? Déterminer éventuellement sa norme.

III-3°) L'application linéaire θ de \mathcal{P}_0 dans \mathcal{P} est-elle lipschitzienne ?

III-4°) Étude de la continuité de la forme linéaire S :

Dans cette question, q est un entier donné strictement positif.

a. Soit I_q l'intégrale définie par la relation : $I_q = \int_0^1 \frac{1-t^q}{(1-t)(1+t^q)} dt$.

Étudier la définition de l'intégrale I_q et la convergence de la suite réelle $(I_q)_{q \geq 1}$ lorsque l'entier q croît indéfiniment.

b. Soit $Z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite appartenant à \mathcal{P} , de période $2q$ dont les termes $z_n, n \in \mathbb{N}$, sont définis par les relations :

pour tout entier n compris entre 1 et $q : 1 \leq n \leq q, z_n = 1,$

pour tout entier n compris entre $q+1$ et $2q : q+1 \leq n \leq 2q, z_n = -1.$

Étant donné un entier N strictement positif, soit V_N le réel défini par la relation

$$V_N = \sum_{n=1}^{2qN} \frac{z_n}{n}.$$

Étudier la convergence de la suite réelle $(V_N)_{N \geq 1}$.

c. Dédurre des résultats précédents que la forme linéaire S définie sur \mathcal{P}_0 , n'est pas lipschitzienne.

FIN DU PROBLÈME