**À LIRE ATTENTIVEMENT**

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas $\boxed{\text{encadrées}}$, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des questions (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- Il est conseillé d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Aucun départ avant la fin des 4 heures n'est autorisé.
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.
- ⚠Le sujet * ne peut être choisi **éventuellement** choisi que par les six membres du groupe * , mais ce n'est pas obligatoire.

## Exercice 1 : Algèbre linéaire (commun aux deux sujets)

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M)=AM$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ .
2. $f$ est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})=\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ ?



# Sujet normal : Révisions de MP2I (1 exercice et 1 problème)

## Exercice 2 : Algèbre linéaire

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par $D_n$ le déterminant de $A_n$.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer $D_n$ en fonction de $n$.

## Problème : Analyse

### Etude d'une fonction

1. Etudier sur $]0,+\infty[$ la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$. On précisera le domaine de définition, les limites aux bornes, les extrema et asymptotes éventuels.
2. Montrer que l'on peut prolonger par continuité $f$ en $0$ . Ce prolongement sera encore noté $f$. Préciser la valeur de $f$ en $0$ .
3. La fonction $f$ est-elle dérivable en $0$ ?
4. Montrer que $f$ est une bijection de $]0,\mathrm{e}]$ sur $\left]0,\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}\right]$.
5. La fonction réciproque de $f$ est-elle continue, dérivable sur $\left]0,\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}\right]$ ?

### Etude d'une suite

Soit $x$ un réel fixé strictement positif. On pose $\Phi_x(t) = x^t$, et on définit la suite $(t_n)_n$ de la manière suivante

$$t_0 = 1, \quad t_{n+1} = \Phi_x(t_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Lorsque la suite $(t_n)_n$ est convergente on note $h(x)$ sa limite dans $\mathbb{R}$.

6. Si $x=1$, que peut-on dire sur la convergence de la suite $(t_n)_n$ ?
7. Justifier que si $h(x)$ existe (c'est-à-dire la suite $(t_n)_n$ est convergente) alors $h(x) = \Phi_x(h(x))$, en déduire dans ce cas que $f(h(x)) = x$.

On va traiter le cas $x > 1$ :

8. Montrer que pour $x \in ]1,+\infty[$ , la fonction $\Phi_x : t \mapsto x^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
9. Soit $x > 1$, montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n < t_{n+1}$.
10. On suppose que $x \in \left]1,\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}\right]$, montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \leqslant \mathrm{e}$. En déduire que dans ce cas la suite $(t_n)_n$ est convergente.
11. On suppose $x > \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$, et on veut montrer que la suite $(t_n)_n$ a pour limite $+\infty$. On pourra supposer que la suite est convergente vers $h(x)$ et en utilisant les questions 7. et 1. aboutir à une contradiction. Conclure.

On va étudier le cas $x \in ]0,1[$ :

12. Mont rer que pour $x \in ]0,1[$, la fonction $\Phi_x : t \mapsto x^t$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur la monotonie de $\Phi_x \circ \Phi_x$ sur $\mathbb{R}$ ?
13. Pour $0 < x < 1$, montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{2n+1} < t_{2n}$.
14. On suppose que $0 < x < 1$. Montrer par récurrence que la suite extraite $(t_{2n})_n$ est décroissante, puis que la suite extraite $(t_{2n+1})_n$ est croissante.
15. En déduire qu'elles sont toutes les deux convergentes, et que leur limite ne peut être qu'un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0,1]$, c'est-à-dire une solution de $(\Phi_x \circ \Phi_x)(t) = t$ dans $[0,1]$.

## Détermination des points fixes

La suite du problème consiste à déterminer l'ensemble des points fixes de $\Phi_x \circ \Phi_x$ dans $[0,1]$. Pour cela on pose $g(t) = (\Phi_x \circ \Phi_x)(t) - t$, on admettra le résultat suivant :

$$g'(t) = \Phi_x'(t) \cdot \left(\Phi_x' \circ \Phi_x\right)(t) - 1 = (\ln x)^2 \cdot \Phi_x(t) \cdot (\Phi_x \circ \Phi_x)(t) - 1$$

16. Dans le cas $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right[$ on admet que l'on obtient le tableau suivant :

| $t$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | $(\ln x)^2 x - 1$ | $\searrow$ | $(\ln x)^2 x^{x+1} - 1$ |
| $g(t)$ | $x$ | | $x^x - 1$ |

Préciser le signe de $g'(0)$.
Quelle est la monotonie de $g$ sur $[0,1]$ ?
Montrer que $\Phi_x \circ \Phi_x$ n'a qu'un seul point fixe dans $[0,1]$.
Conclusion pour la convergence de la suite $(t_n)_n$.

17. Dans le cas $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$ on admet que l'on a le tableau suivant :

| $t$ | $0$ | | $\alpha$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | $(\ln x)^2 x - 1$ | $\nearrow$ | $\beta$ | $\searrow$ | $(\ln x)^2 x^{x+1} - 1$ |
| $g(t)$ | $x$ | | | | $x^x - 1$ |

où $\alpha$ est l'unique racine de $g''$ sur $]0,1[$ et $\beta = g'(\alpha) = -e^{-1} \ln x - 1$.
Préciser le signe de $\beta$ lorsque $x \in \left[e^{-e}, \frac{1}{e}\right[$.
Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite $(t_n)_n$ lorsque $x \in \left[e^{-e}, \frac{1}{e}\right[$ ?

18. On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin que $x \in ]0, e^{-e}[$. Et on admet que le tableau de variation est de la forme suivante :

| $t$ | $0$ | | $\gamma$ | | $\alpha$ | | $\delta$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | $(\ln x)^2 x - 1 < 0$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\beta > 0$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $(\ln x)^2 x^{x+1} - 1 < 0$ |
| $g(t)$ | $x$ | $\searrow$ | $g(\gamma)$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | $g(\delta)$ | $\searrow$ | $x^x - 1$ |



avec $\gamma < \alpha < \delta$ et $g'(\gamma) = g'(\delta) = 0$. On admet aussi que $\Phi_x$ possède un unique point fixe dans $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ que l'on note $p$, donc $\Phi_x(p) = p$.
Montrer que $g'(p) = (\ln p)^2 - 1$ et en déduire le signe de $g'(p)$.
En déduire que $\Phi_x \circ \Phi_x$ possède trois points fixes $p_1, p, p_2$ vérifiant $0 < p_1 < \gamma < p < \delta < p_2 < 1$.

19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $p_2 \leqslant t_{2n}$, et que la suite $(t_{2n})_n$ est convergente vers $p_2$.
20. On veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $t_{2n+1} \leqslant p$. Pour cela, on supposera qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p < t_{2n_0+1}$ et on aboutira à une contradiction.
Que peut-on conclure sur la convergence de $(t_{2n+1})_n$ ?
La suite $(t_n)_n$ est-elle convergente ?

# Sujet $*$ : Mines-Ponts 1995

Ce problème est consacré à l'étude de suites complexes périodiques. Par définition, une suite complexe $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique si et seulement s'il existe un entier naturel $p$, différent de $0$, tel que, pour tout entier naturel $n$, l'égalité $u_{n+p}=u_n$ a lieu.

L'entier $p$ est appelé période de la suite $U$. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble de ces suites.

La première et la deuxième partie définissent les applications linéaires $L$, $D$, $\theta$, $S$ et les sous-espaces vectoriels $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ de l'espace vectoriel $\mathscr{P}$. Elles étudient les noyaux et les espaces images de ces applications.

## Première partie

Désignons par $\mathscr{B}$ l'ensemble des suites complexes $V=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées.

Admettons que $\mathscr{B}$ soit un espace vectoriel complexe.

### 1. Premières propriétés de l'ensemble $\mathscr{P}$ des suites complexes périodiques

1.a) Désignons par $\mathscr{T}(U)$ l'ensemble des périodes d'une suite complexe périodique $U$.
Démontrer l'existence d'une plus petite période $p_0$. Caractériser l'ensemble $\mathscr{T}(U)$.
Déterminer les ensembles $\mathscr{T}(\Omega)$ et $\mathscr{T}(C)$ relatifs aux deux suites définies ci-dessous :
$\Omega=(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n$, $\omega_n=1$ ; $C=(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n$, $c_n=\mathfrak{Re}\left(i^{n+1}\right)$.

1.b) Démontrer que l'ensemble $\mathscr{P}$ des suites complexes périodiques est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{B}$.

1.c) Cet espace vectoriel $\mathscr{P}$ est-il de dimension finie ?

Étant donnés une suite $U$ de $\mathscr{P}$ et deux entiers naturels $p$ et $n$, désignons par $A(U,p,n)$ le nombre complexe défini par la relation : $A(U,p,n)=\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}u_{n+k}$.

### 2. Décomposition de $\mathscr{P}$ en somme directe

2.a) Démontrer que pour une suite $U$ donnée de $\mathscr{P}$, le nombre complexe $A(U,p,n)$ ne dépend ni de l'entier naturel $n$, ni de la période $p$ de $U$ ($p$ appartient à $\mathscr{T}(U)$).

Pour une suite $U$ donnée de $\mathscr{P}$, soit $L(U)$ la valeur commune de ces nombres complexes $A(U,p,n)$ ; désignons par $L$ la forme linéaire : $U\mapsto L(U)$.

2.b) Calculer $L(\Omega)$ et $L(C)$ ; $\Omega$ et $C$ sont les suites définies à la question I-1 a.

2.c) Soit $\mathscr{P}_0$ le noyau de la forme linéaire $L$. Soit $\mathscr{P}_1$ le sous-espace vectoriel engendré par la suite $\Omega$ définie à la question I-1 a.
Démontrer que l'espace vectoriel $\mathscr{P}$ est égal à la somme directe des deux sous-espaces vectoriels $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ : $\mathscr{P}=\mathscr{P}_0\oplus\mathscr{P}_1$.

### 3. Étude d'un endomorphisme $D_0$ de $\mathscr{P}_0$

À tout élément $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{P}$, associons la suite $U'=(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u'_n=u_{n+1}-u_n.$$

3.a) Démontrer que, pour tout $U$ de $\mathscr{P}$, la suite $U'$ appartient à $\mathscr{P}$.
Soit $D$ l'application : $U\mapsto U'$.
Établir que $D$ est un endomorphisme de $\mathscr{P}$.
Déterminer les images $D(\Omega)$ et $D(C)$ des suites définies à la question I-1 a.
Quels sont les noyau et espace image de l'endomorphisme $D$ ?

3.b) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathscr{P}_0$ est stable par $D$ et que la restriction de $D$ à $\mathscr{P}_0$ est un automorphisme, qui est noté $D_0$.

3.c) Réservé aux 5/2 Déterminer toutes les valeurs propres de cet automorphisme $D_0$ de $\mathscr{P}_0$ ; préciser des éléments de $\mathscr{P}_0$ qui sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

### 4. Étude d'une application linéaire de $\mathscr{P}_0$ dans $\mathscr{P}$

À tout élément $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{P}$, associons la suite $U^*=(u^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u^*_n=\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

4.a) Démontrer que l'application $\theta : U\mapsto U^*$ est une application linéaire de $\mathscr{P}_0$ dans $\mathscr{P}$.

4.b) Déterminer le noyau et l'espace image de cette application linéaire $\theta$.

## Deuxième partie

Soient $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{P}$ et $\alpha$ un réel supérieur ou égal à $1$. L'objet de cette partie est d'étudier la série de terme général $v_n=\dfrac{u_n}{n^\alpha}$, $n\geqslant 1$, et de considérer la forme linéaire $S$ qui, à un élément $U$ de $\mathscr{P}_0$, associe le nombre complexe $S(U)$ défini par la relation : $S(U)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n}$.

5. Soient $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{P}$ et $\alpha$ un réel strictement supérieur à $1$.
Quelle est la nature de la série de terme général $u_n$, $n\in\mathbb{N}$ ?
Quelle est celle de la série de terme général $v_n=\dfrac{u_n}{n^\alpha}$, $n\geqslant 1$ ?

6. Soit $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{P}$ de période $p$. Supposons le réel $\alpha$ égal à $1$. Pour étudier la convergence de la série de terme général $v_n=\dfrac{u_n}{n}$, $n\geqslant 1$, considérons les nombres complexes $w_k$, $k\geqslant 1$, définis par la relation :

$$w_k=v_{kp}+v_{kp+1}+\cdots+v_{kp+p-1}=\sum_{j=0}^{p-1}\frac{u_j}{kp+j}.$$

6.a) En supposant les deux entiers $p$ et $j$ donnés ($p>0$, $j\geqslant 0$), déterminer le développement limité à l'ordre $2$ par rapport à $\dfrac{1}{k}$ de l'expression $\dfrac{1}{kp+j}$, lorsque l'entier $k$ croît indéfiniment.

6.b) En déduire la nature de la série de terme général $w_k$, $k\geqslant 1$, lorsque la suite $U$ appartient à $\mathscr{P}$ sans appartenir à $\mathscr{P}_0$ puis, lorsque la suite $U$ appartient à $\mathscr{P}_0$.

6.c) En déduire la nature de la série de terme général $v_n$, $n\geqslant 1$.
Discuter sa convergence suivant que la suite $U$ appartient ou non à l'ensemble $\mathscr{P}_0$.

Désormais, désignons par $S$ la forme linéaire qui, à une suite $U$ appartenant à $\mathscr{P}_0$, fait correspondre le réel $S(U)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n}$.

### 7. Deux exemples

7.a) Soit $C=(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie à la question I-1 a.
Calculer $S(C)$. Une méthode, parmi d'autres, consiste à utiliser la relation :

$$\text{Pour tout entier naturel } k,\ \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k+1}.$$

7.b) Soit $T=(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de période $p$, dont les termes $t_n$, $n\in\mathbb{N}$, sont définis par les relations :

Pour tout entier $r$ compris entre $1$ et $p-1$, $1\leqslant r\leqslant p-1$, $t_r=1$ ; $t_p=1-p$.

Déterminer $S(T)$ en montrant l'existence d'une constante $\gamma$ telle que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln(n)+\gamma+o(1)$$

lorsque l'entier $n$ croît indéfiniment.