

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1995

MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
OPTIONS M ET P'

CORRECTION¹

Première partie

I-1 Premières propriétés de l'ensemble $\mathcal{P}$ des suites complexes périodiques :

- (a) • L'ensemble $\mathcal{T}(U)$ des périodes est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide (par définition). Donc elle admet un plus petit élément p_0 .
• Soit p une période de U , pour tout entier q , pq est encore une période car pour tout entier n , on a :

$$u_{n+pq} = u_{n+pq-1} = \dots = u_{n+p} = u_n.$$

On obtient donc $p_0\mathbb{N}^* \subset \mathcal{T}(U)$.

Inversement, soit $p > 0$ une période de U . On effectue la division euclidienne de p par p_0 qui est non nul.

$$p = qp_0 + r$$

où $0 \leq r < p_0$. On sait que p et que qp_0 sont de périodes de U donc, pour tout entier n ,

$$u_{n+r} = u_{n+p-qp_0} = u_{n-qp_0} = u_n.$$

D'après la définition de p_0 , nécessairement $r = 0$. Ce qui implique que $p \in p_0\mathbb{N}^*$. D'où :

$$\mathcal{T}(U) = p_0\mathbb{N}^*.$$

• La suite Ω est constante, pour tout entier $p > 0$ et tout entier n on a : $w_{n+p} = w_n$. On en déduit que $\mathcal{T}(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \operatorname{Re} \left(e^{\frac{(n+1)\pi}{2}} \right) = \cos \left(\frac{(n+1)\pi}{2} \right)$, donc $c_{n+4} = c_n$. Les premiers termes de la suite C sont

$$c_0 = 0, c_1 = -1, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = 0, c_5 = -1.$$

Donc 1, 2 et 3 ne sont pas des périodes, par conséquent la plus petite période est 4. On en déduit que $\mathcal{T}(C) = 4\mathbb{N}^*$.

- (b) Soit $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite périodique et $p > 0$ une période. Montrons que U est bornée, en effet, soit $M = \max(|u_0|, \dots, |u_{p-1}|)$. Pour tout entier n , il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $n = pq + r$. Donc :

$$|u_n| = |u_{pq+r}| = |u_r| \leq M$$

Cela implique que U est bornée et que $\|U\|_\infty = M$. D'où : $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$.

Vérifions maintenant que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$.

- La suite nulle est périodique (de période 1) donc $\mathcal{P} \neq \emptyset$.
- Soit $U \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, la suite λU appartient encore à $\mathcal{P}$ car une période $p > 0$ de U est encore une période de λU .
- Soit $(U, V) \in \mathcal{P}^2$. On considère $p > 0$ une période de U et $q > 0$ une période de V . Posons alors $r = pq$. C'est une période de $U + V$ car, pour tout entier naturel n ,

$$(U + V)_{n+r} = u_{n+pq} + v_{n+pq} = u_n + v_n = (U + V)_n.$$

Cela implique que $U + V$ est périodique.

On en déduit que l'ensemble $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}$.

- (c) Supposons par l'absurde que $\mathcal{P}$ est de dimension finie. Soit $U_1, \dots, U_n$ une base de $\mathcal{P}$. On note $p_1, \dots, p_n$ les périodes des suites $U_1, \dots, U_n$.

D'après la démonstration ci-dessus, toute combinaison linéaire des suites $U_1, \dots, U_n$ est une suite périodique de période $p = p_1 \times \dots \times p_n$. Considérons V une suite de période minimal $p + 1$ par exemple la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } (p+1) \text{ divise } n \\ 0 & \text{si sinon} \end{cases}.$$

La suite V n'est pas engendrée par la famille $(U_1, \dots, U_n)$, c'est absurde. Finalement, $\mathcal{P}$ n'est pas de dimension finie.

I-2 Décomposition de $\mathcal{P}$ en somme directe.

- (a) Soit $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et p une de ses périodes. Montrons d'abord que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A(U, p, n) = A(U, p, 0).$$

Par division euclidienne de n par p , on a $n = pq + r$ avec $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on peut écrire :

$$\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_{r+k} = \frac{1}{p} \sum_{i=r}^{p+r-1} u_i = \frac{1}{p} \sum_{i=r}^{p-1} u_i + \frac{1}{p} \sum_{i=p}^{p+r-1} u_i.$$

Or

$$\sum_{k=p}^{p+r-1} u_k = \sum_{k=p}^{p+r-1} u_{k-p} = \sum_{j=0}^{r-1} u_j$$

D'où,

$$A(U, p, n) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k} = \frac{1}{p} \left(\sum_{i=r}^{p-1} u_i + \sum_{j=0}^{r-1} u_j \right) = A(U, p, 0).$$

Vérifions maintenant que $A(U, p, 0) = A(U, p_0, 0)$ où p_0 est la plus petite période de U . D'après ce qui précède, il existe alors $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = p_0 q$, puis, par division euclidienne par p_0 , tout entier $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, s'écrit de manière unique $k = p_0 i + r$ où $r \in \llbracket 0, p_0-1 \rrbracket$ et $i \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$. On a :

$$A(U, p, 0) = \frac{1}{p_0 q} \sum_{k=0}^{p-1} u_k = \frac{1}{p_0 q} \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{r=0}^{p_0-1} u_{p_0 i + r}.$$

Mais, pour tout entier i , on a :

$$\sum_{i=0}^{q-1} u_{p_0 i + r} = \sum_{i=0}^{q-1} u_r = q u_r.$$

D'où :

$$A(U, p, 0) = \frac{1}{p_0 q} \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{r=0}^{p_0-1} u_r = \frac{1}{p_0} \sum_{r=0}^{p_0-1} u_r = A(U, p_0, 0)$$

Finalement, pour tout entier n et toute période p , $A(U, p, n) = A(U, p_0, 0)$. Cela montre que ce terme ne dépend ni de l'entier n ni du de la période p de U .

- (b) On vient de voir que $L(\Omega) = 1$ (Ω est de période 1). On a vu que C était de période 4 donc $L(C) = \frac{1}{4}(c_0 + c_1 + c_2 + c_3) = 0$.
- (c) On remarque que $L(\Omega) = 1 \neq 0$ et que $L(C) = 0$. Donc $\Omega \notin \mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_0 \neq \{0\}$.
Soit U une suite périodique, la suite $V = U - L(U)\Omega \in \mathcal{P}_0$ car

$$L(V) = L(U - L(U)\Omega) = L(U) - L(U)L(\Omega) = 0$$

Donc $U = V + L(U)\Omega$ avec $V \in \mathcal{P}_0$ et $L(U)\Omega \in \mathcal{P}_0$, ce qui prouve que $U \in \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1$. D'où :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1.$$

Soit $U \in \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1$, donc U est 1-périodique et son premier terme est nul, donc U est la suite nulle. D'où :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_1.$$

I-3 Étude d'un endomorphisme D_0 de $\mathcal{P}_0$.

- (a) • Soit p une période de U , pour tout entier n ,

$$u'_{n+p} = u_{n+p+1} - u_{n+p} = u_{n+1} - u_n = u'_n.$$

Cela prouve que U' est périodique, donc $U' \in \mathcal{P}$ et que l'application D transforme $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$.

- Soit U et V dans $\mathcal{P}$ et λ, μ dans $\mathbb{C}$. Notons $W = \lambda U + \mu V$ et $U' = D(U)$, $V' = D(V)$ ainsi que $W' = D(W)$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w'_n &= w_{n+1} - w_n \\ &= (\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) - (\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= \lambda(u_{n+1} - u_n) + \mu(v_{n+1} - v_n) \\ &= \lambda u'_n + \mu v'_n \end{aligned}$$

Cela montre que $D(\lambda U + \mu V) = \lambda D(U) + \mu D(V)$ et donc que D est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

- Puisque Ω est de période 1, alors $D(\Omega) = 0$. D'après ce qui précède une période C est aussi une période de $C' = D(C)$. Il suffit donc de calculer c'_0, c'_1, c'_2 et c'_3 . On a alors

$$c'_0 = -1, c'_1 = 1, c'_2 = 1 \text{ et } c'_3 = -1$$

On en déduit que pour tout entier n ,

$$c'_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 3 \text{ modulo } 4 \\ 1 & \text{si sinon} \end{cases}.$$

- Soit $U \in \ker(D)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$. Cela implique de U est constante. Réciproquement, si U est constante $D(U) = 0$. On obtient

$$\ker(D) = \text{Vect}(\Omega).$$

- Soit $U' \in \text{Im}(D)$ et $U \in \mathcal{P}$ tel que $U' = D(U)$. Soit p une période de U , c'est aussi une période de U' , on a :

$$L(U') = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u'_k = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} (u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{p} (u_p - u_0) = 0$$

Donc $\text{Im}(D) \subset \mathcal{P}_0$.

Montrons maintenant que $\mathcal{P}_0 \subset \text{Im}(D)$. Soit U telle que $L(U) = 0$. On cherche V telle que $U = D(V)$. Cela implique que pour tout entier n , $u_n = v_{n+1} - v_n$. En utilisant un télescopage on voit que nécessairement, pour tout entier n ,

$$v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

Posons donc, en prenant par exemple $v_0 = 0$, la suite V définie par : $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. On remarque que si p est une période de U et $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+p} - v_n = \sum_{k=n}^{n+p-1} u_k = pA(U, p, n) = pL(U) = 0.$$

Cela prouve que V est périodique. Il est alors aisé de vérifier que $D(V) = U$. D'où :

$$\text{Im}(D) = \mathcal{P}_0.$$

- (b) Comme $\text{Im}(D) = \mathcal{P}_0$, l'espace vectoriel $\mathcal{P}_0$ est stable par D . Soit $U \in \mathcal{P}_0$ et V de $\mathcal{P}$ telle que $D(V) = U$. D'après ce qui précède

$$V = V_0 + V_1$$

où $V_0 \in \mathcal{P}_0$ et $V_1 \in \mathcal{P}_1$. La suite V_0 est donc un antécédent de U dans $\mathcal{P}_0$ et tout autre antécédent de U est de la forme $V_0 + \lambda\Omega$ car $\ker(D) = \mathcal{P}_1$. Donc U a un unique antécédent dans $\mathcal{P}_0$ et par suite l'endomorphisme induit sur $\mathcal{P}_0$ par D est un automorphisme.

- (c) Soit $U \in \mathcal{P}_0$ un éventuel vecteur propre et λ une éventuelle valeur propre associée. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u'_n = \lambda u_n$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (\lambda + 1)u_n.$$

La suite U est donc nécessairement une suite géométrique de raison λ où de plus $u_0 \neq 0$ car $U \neq 0$.

Si p est une période de U , on a alors $u_p = (1 + \lambda)^p u_0 = u_0$ donc $(1 + \lambda)^p = 1$. Cela implique que $\lambda = \mu - 1$ où μ est une racine p -ème de l'unité.

Réciproquement pour tout entier p non nul et toute racine p -ème de l'unité différente de 1, si on pose $u_n = \mu^n$, la suite U est périodique (elle admet p pour période), on a

$$L(U) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \mu^k = \frac{1 - \mu^p}{1 - \mu} = 0,$$

donc $U \in \mathcal{P}_0$.

Finalement les valeurs propres de D sont les nombres complexes λ de la forme $\mu - 1$ où μ est une racine de l'unité différente de 1 et l'espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par la suite géométrique de raison μ .

I-4 Étude d'une application linéaire de $\mathcal{P}_0$ dans $\mathcal{P}$.

- (a) Il est clair que θ est linéaire. Il reste à montrer que θ est bien à valeurs dans $\mathcal{P}$.

Soit $U \in \mathcal{P}_0$. Soit p une période de U . Montrons que p est une période de U^* . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+p}^* = u_n^* + \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = u_n^* + pL(U) = u_n^*$$

car $U \in \mathcal{P}_0$. Donc $\theta(U) = U^* \in \mathcal{P}$.

- (b) Soit $U \in \ker(\theta)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_n^* - u_{n-1}^* = 0 - 0 = 0$$

et par périodicité $u_0 = 0$. Donc U est la suite nulle. La réciproque est évidente par linéarité de θ . Ainsi $\ker(\theta) = \{0\}$ et θ est injective.

Soit $V \in \mathcal{P}$ de période p . Posons $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_n = v_n - v_{n-1}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_0 = v_p - v_{p-1}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+p} = v_{n+p} - v_{n+p-1} = \begin{cases} v_n - v_{n-1} = u_n & \text{si } n > 1 \\ v_p - v_{p-1} = u_0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Donc U est p -périodique. Enfin,

$$L(U) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p u_k = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{k=p} (v_k - v_{k-1}) = v_p - v_0 = 0.$$

Donc $U \in \mathcal{P}_0$, de plus $\theta(U) = V$. Ainsi θ est surjective et $\text{Im}(\theta) = \mathcal{P}$.

Deuxième partie

II-1 Soit $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{P}$ et α un réel strictement supérieur à 1.

- La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge si, et seulement si, son terme général est nulle.
- Comme U est bornée ($\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$), alors il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| = \left| \frac{u_n}{n^\alpha} \right| \leq \frac{M}{n^\alpha}$. Comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ est absolument convergente, donc convergente.

II-2 (a) On a :

$$\frac{1}{kp+j} = \frac{1}{kp} \left(\frac{1}{1 + \frac{j}{kp}} \right) = \frac{1}{pk} \left(1 - \frac{j}{pk} + o\left(\frac{1}{k}\right) \right) = \frac{1}{pk} - \frac{j}{p^2 k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$w_k = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{u_j}{kp+j} = \left(\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} u_j \right) \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{p^2} \sum_{j=0}^{p-1} j u_j \right) \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Deux cas sont possibles :

- Si $U \in \mathcal{P}_0$ alors $w_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, donc la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} w_k$ converge absolument, donc converge.
- Si $U \notin \mathcal{P}_0$ alors $w_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{L(U)}{k}$. Comme la série harmonique est divergente, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} w_k$ diverge.

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_k = \sum_{i=kp}^{kp+p-1} \frac{u_i}{i}$ et $a_0 = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{u_i}{i}$. Par le changement d'indice $i = kp + j$ et par p -périodicité de $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient :

$$a_k = \sum_{i=kp}^{kp+p-1} \frac{u_i}{i} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{u_{kp+j}}{kp+j} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{u_j}{kp+j} = w_k$$

Montrons maintenant que les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n}$ sont de même nature et qu'elles ont la même somme.

Prenons n un entier et k entier définie par $kp \leq n < kp + p - 1$.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n \frac{u_j}{j} - \sum_{j=0}^k w_j \right| &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{u_j}{j} - \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{p-1} \frac{u_i}{jp+i} \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{u_j}{j} - \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{p-1} \frac{u_{jp+i}}{jp+i} \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{u_j}{j} - \sum_{l=0}^{kp+p-1} \frac{u_l}{l} \right| = \left| \sum_{j=n+1}^{kp+p-1} \frac{u_j}{j} \right|. \end{aligned}$$

D'où

$$\left| \sum_{j=1}^n \frac{u_j}{j} - \sum_{j=0}^k w_j \right| \leq \sum_{j=n+1}^{kp+p-1} \frac{|u_j|}{j} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{p-1} |u_j|.$$

On conclut que la série de terme général w_n converge vers la même limite que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

D'après les deux questions précédentes, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n}$ converge, si et seulement si, $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} w_k$ converge ou encore, si et seulement si, $U \in \mathcal{P}_0$.

II-3 Deux exemples :

(a) Soit $U \in \mathcal{P}_0$. Notons $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de sommes partielles associée à $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} s_{np} &= \sum_{k=1}^{np} \frac{w_k}{k} = \sum_{k=1}^{np} w_k \int_0^1 t^{k-1} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{np} w_k t^{k-1} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{n-1} w_{kp+i} t^{kp+i-1} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^p w_i t^{i-1} \sum_{k=1}^{n-1} t^{kp} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^p w_i t^{i-1} \frac{1-t^{pn}}{1-t^p} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{p-1} w_i t^{i-1} \frac{1-t^{pn}}{1-t^p} dt + \int_0^1 w_p t^{p-1} \frac{1-t^{pn}}{1-t^p} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{p-1} w_i t^{i-1} \frac{1-t^{pn}}{1-t^p} dt - \int_0^1 \sum_{i=1}^{p-1} w_i t^{p-1} \frac{1-t^{pn}}{1-t^p} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{p-1} w_i \frac{t^{i-1} - t^{p-1}}{1-t^p} dt + \sum_{i=1}^{p-1} \int_0^1 t^{np-1} \frac{t^p - t^i}{1-t^p} dt \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, la fonction $t \mapsto \frac{t^p - t^i}{1-t^p}$ se prolonge par continuité en 1 puisque

$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^p - t^i}{1-t^p} = \frac{i-p}{p}$, donc elle bornée. Donc il existe $M_i > 0$ tel que $\forall t \in [0, 1]$, $\left| \frac{t^p - t^i}{1-t^p} \right| \leq M_i$ et par

conséquent $\left| \int_0^1 t^{np-1} \frac{t^p - t^i}{1-t^p} dt \right| \leq M_i \int_0^1 t^{np-1} dt = \frac{M_i}{pn}$. D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{np} = \sum_{i=1}^{p-1} w_i \int_0^1 \frac{t^{i-1} - t^{p-1}}{1-t^p} dt$.

La suite C est bien dans $\mathcal{P}_0$ et est 4-périodique, donc

$$S(C) = \sum_{i=1}^3 c_i \int_0^1 \frac{t^{i-1} - t^3}{1-t^4} dt = - \int_0^1 \frac{1-t^3}{1-t^4} dt + \int_0^1 \frac{t^2-t^3}{1-t^4} dt = - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

(b) Calculons la somme des Np premiers termes de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{t_n}{n}$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Notons $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

On a :

$$\begin{aligned}
S_{Np}(x) &= \sum_{n=1}^{Np} \frac{t_n}{n} = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^p \frac{1}{kp+j} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \\
&= \sum_{l=1}^{pN} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \\
&= H_{Np} - H_N = \ln(Np) + \gamma - \ln(N) - \gamma + o(1) \\
&= \ln(p) + o(1).
\end{aligned}$$

Puisque la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{t_n}{n}$ converge ($\sum_{n=1}^p t_n = 0$), alors la suite $(S_{Np})_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la somme de la série, d'où :

$$S(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{Np} = \ln(p).$$

Troisième partie

III-1 On remarque pour commencer que si U appartient à $\mathcal{P}$ et λ est un complexe, $L(\lambda U) = \lambda L(U)$ de manière évidente.

Si U et V sont deux suites de $\mathcal{P}$ et si on note p et q des périodes respectives. On sait que $r = pq$ est une période de $U + V$. On en déduit que

$$L(U + V) = A(U + V, r, 0) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (u_k + v_k) = A(U, r, 0) + A(V, r, 0) = L(U) + L(V)$$

car r est une période de U et V .

Soit $U \in \mathcal{P}$. Soit p une période de U ,

$$|L(U)| = \left| \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_k \right| \leq \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} |u_k| \leq \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \|U\|_{\infty} = \|U\|_{\infty}.$$

On en déduit que L est 1-lipschitzienne et $\|L\| = \sup_{U \neq 0} \frac{|L(U)|}{\|U\|_{\infty}} \leq 1$.

De plus, $\|\Omega\|_{\infty} = 1$ et $L(\Omega) = A(\Omega, 1, 0) = w_0 = 1$. Donc $\frac{|L(\Omega)|}{\|\Omega\|_{\infty}} = 1$. Cela implique que $\|L\| = 1$.

$\mathcal{P}_0 = \ker(L) = L^{-1}\{0\}$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

III-2 Soit U dans $\mathcal{P}$. Pour tout entier n , on a :

$$|u'_n| = |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2\|U\|_{\infty}$$

On en déduit que $\|D(U)\|_{\infty} \leq 2\|U\|_{\infty}$. L'application D est 2-lipschitzienne.

Si on considère la suite U définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout entier n . On a que $\|U\|_{\infty} = 1$ alors qu'en notant encore $U' = D(U)$ on a $u'_0 = u_1 - u_0 = (-1) - 1 = -2$ et donc $\|D(U)\|_{\infty} \geq 2$. Donc $\|D\| = 2$.

III-3 Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et soit U la suite $2q$ -périodique telle que $(u_0, u_1, \dots, u_{q-1}, u_q, \dots, u_{2q-1}) = (1, 1, \dots, -1, -1, \dots, -1)$. Cette suite appartient bien à $\mathcal{P}_0$ et $\theta(U) = (1, 2, \dots, q, q-1, q-2, \dots, 1, 0, 1, 2, \dots)$, alors on a

$$\frac{\|\theta(U)\|_{\infty}}{\|U\|_{\infty}} = \frac{q}{1} = q.$$

Donc la fonction $U \mapsto \frac{\|\theta(U)\|_{\infty}}{\|U\|_{\infty}}$ n'est pas bornée sur $\mathcal{P} \setminus \{0\}$. Ainsi l'application linéaire θ n'est pas lipschitzienne de $(\mathcal{P}_0, \|\cdot\|_{\infty})$ vers $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\infty})$.

III-4 Étude de la continuité de la forme linéaire S :

- (a) Considérons la fonction $t \in [0, 1[\mapsto \frac{1-t^q}{(1-t)(1-t^p)} = \frac{1+t+\dots+t^{q-1}}{1+t^q}$ qui est continue sur $[0, 1[$ et se prolonge par continuité en 1. Pour tout $t \in [0, 1]$, $0 < 1+t^q \leq 2$ donc $\frac{1}{1+t^q} \geq \frac{1}{2}$. De plus, $1+t+\dots+t^{q-1} \geq 0$ donc $\frac{1+t+\dots+t^{q-1}}{1+t^q} \geq \frac{1}{2}(1+t+\dots+t^{q-1})$. Par croissance de l'intégrale,

$$I_q \geq \int_0^1 \frac{1}{2}(1+t+\dots+t^{q-1})dt = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{q-1} \frac{1}{j+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q \frac{1}{k}.$$

Comme la série harmonique est divergente, la suite de ses sommes partielles a pour limite $\infty+$. On en déduit par minoration que la suite $(I_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

- (b) La suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien un élément de $\mathcal{P}_0$, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z_n}{n}$ est convergente. La suite $(V_N)_{N \geq 1}$ est donc une sous-suite de la suite de sommes partielles associée à la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z_n}{n}$. Calculons donc V_N . Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} V_N &= \sum_{k=1}^{2qN} \frac{z_k}{k} = \sum_{k=1}^{2qN} z_k \int_0^1 t^{k-1} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{2qN} z_k t^{k-1} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{2q} \sum_{k=1}^{N-1} z_{2kq+i} t^{2kq+i-1} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{2q} z_i t^{i-1} \sum_{k=1}^{N-1} t^{2kq} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{2q} z_i t^{i-1} \frac{1-t^{2qN}}{1-t^{2q}} dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^q t^{i-1} \frac{1-t^{2qN}}{1-t^{2q}} - \sum_{i=q+1}^{2q} t^{i-1} \frac{1-t^{2qN}}{1-t^{2q}} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-t^{2qN}}{1-t^{2q}} \left(\sum_{i=1}^q t^{i-1} - \sum_{i=q+1}^{2q-1} t^{i-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-t^{2qN}}{1-t^{2q}} \left(\frac{1-t^q}{1-t} - t^q \frac{1-t^q}{1-t} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t^q)(1-t^{2qN})}{(1-t)(1+t^q)} dt = I_q - \int_0^1 \frac{(1-t^q)t^{2qN}}{(1-t)(1+t^q)} dt \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \frac{(1-t^q)}{(1-t)(1+t^q)}$ est continue sur $[0, 1[$ et se prolonge par continuité en 1, donc elle est bornée par un certain $M_q \geq 0$. Donc

$$\left| \int_0^1 \frac{(1-t^q)t^{2qN}}{(1-t)(1+t^q)} dt \right| \leq M_q \int_0^1 t^{2qN} dt = \frac{M_q}{2qN+1}.$$

Donc on peut conclure que $S(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z_n}{n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} V_N = I_q$.

- (c) D'après les calculs précédents, on a :

$$\frac{|S(Z)|}{\|Z\|} = \frac{I_q}{1} = I_q.$$

Mais $\lim_{q \rightarrow \infty} I_q = +\infty$. Donc la fonction $U \mapsto \frac{|S(U)|}{\|U\|_\infty}$ n'est pas majorée sur $\mathcal{P}_0 \setminus \{0\}$. Donc S n'est pas lipschitzienne de $(\mathcal{P}_0, \|\cdot\|_\infty)$ vers $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

•••••