Programme de colle – MPI

1. Suites, analyse asymptotique (MP2I)

Révisions du programme de MP2I. Voir page suivante.

En particulier, étude de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, exemples de développements asymptotiques.

Le **théorème de Cesàro** a été énoncé, et sera démontré à l'aide du théorème sur la sommation des relations de comparaisons dans le chapitre sur les séries.

La notion de **valeur d'adhérence** est introduite sans aucun développement pour le moment.

2. Séries numériques réelles et complexes (MP2I)

Révisions du programme de première année, voir page suivante.

3. Séries numériques (MPI)

On se contente pour le moment de **séries numériques**.

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) ~~Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie~~	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Lien suite-série, séries télescopiques. Série absolument convergente.	Divergence grossière.
Une série absolument convergente ~~d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie~~ est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
b) Compléments sur les séries numériques	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone.
Règle de d'Alembert.	
~~Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent.~~	~~La suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang. Cas particulier : théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie).~~

Semaine prochaine : Fin des séries : Sommation des relations de comparaison. Dénombrement. Dénombrabilité. Familles sommables.

4. Questions de cours

Les preuves marquées d'un astérisque ✻ *sont réservées aux trinômes 6, 7 du groupe de préparation à X-ENS – Centrale – Mines-Ponts.*

(i) **Formulaire de développements limités** : $\exp, \cos, \sin, \text{ch}, \text{sh}, (1+x)^\alpha, \dfrac{1}{1\pm x}, \ln(1\pm x), \text{Arctan}$ à tous ordres ; $\tan$ et th à l'ordre 7.

(ii) **Intégrales de Wallis** : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$: relation de récurrence, monotonie, (nI_nI_{n-1}) est constante, équivalent.

(iii) **Formule de Stirling** : utilisation des séries pour obtenir $n! \sim K\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

Expression de l'intégrale de Wallis I_{2n} à partir de la formule de récurrence **admise** $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

À l'aide de l'équivalent **admis** $I_{2n} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$, on en déduit K.

(iv) **Développement asymptotique de la série harmonique** : $H_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$.

Application au calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

(v) **Exercices CCINP : 5, 6, 7, 8, 43, 46, 55**

(vi) ✻ **Théorème de Bolzano-Weierstrass** dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$: soit par dichotomie, soit en démontrant le *lemme des pics* : de toute suite réelle, on peut extraire une suite monotone, au choix du colleur.

(vii) ✻ **Théorème de Cesàro** : démonstration dans le cas convergent avec les ε. La réciproque est fausse.

5. Exercices CCINP

- **CCINP 5 : Série de Bertrand particulière**

  1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

     a) **Cas $\alpha \leqslant 0$** : En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

     b) **Cas $\alpha > 0$** : Étudier la nature de la série.

     Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

  2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

- **CCINP 6 : Critère de d'Alembert (à énoncer avant de traiter l'exercice)**

  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

  1. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

     Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

  2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

- **CCINP 7** :
  1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
     Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
  2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n+\mathrm{i})\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

     Remarque : i est ici le nombre complexe de carré égal à -1
- **CCINP 8 : Théorème spécial sur des séries alternées (à énoncer avant de traiter l'exercice)**
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
  1. a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

        Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.
     b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
  2. Étudier la convergence ~~simple sur~~ pour $x\in\mathbb{R}$ fixé de la série ~~de fonctions~~ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}$.
- **CCINP 43** : Soit $x_0\in\mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.
  1. a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
     b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
  2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.
- **CCINP 46** : On considère la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.
  1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
  2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
  3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?
- **CCINP 55** : Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que
  $$\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = 2a\,u_{n+1} + 4(\mathrm{i}a-1)u_n$$
  avec $(u_0, u_1)\in\mathbb{C}^2$.
  1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
     (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
  2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
     Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
     Indication : discuter suivant les valeurs de a.

6. Programme de MP2I

A. Suites

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
b) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée. Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient. Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell>0$, alors $u_n>0$ à partir d'un certain rang.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n-\ell\rvert \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.
c) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
d) Suites extraites	
Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. Principe de démonstration par dichotomie.
e) Traduction séquentielle de certaines propriétés	
Partie dense de $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité.	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.
Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).	Résultats analogues pour X non vide minorée (resp. non minorée).
f) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	
g) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et $b\in\mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.	
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell)=\ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x)-x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.

B. Analyse asymptotique

Contenus	Capacités & commentaires
a) Relations de comparaison : cas des fonctions	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$. Lien entre ces relations.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement. Pour la relation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x)+o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs. Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \to 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^\beta(x)$, x^α, $e^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $\ln^\beta(x)$, x^α en 0.
Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O. Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f, g, h vérifient $f \leqslant g \leqslant h$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	
b) Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a.
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathscr{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp$, $\sin$, $\cos$, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan$.	
Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.
Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	
c) Relations de comparaison : cas des suites	
Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.
d) Problèmes d'analyse asymptotique	
Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.	La notion d'échelle de comparaison est hors programme.
Formule de Stirling. Traduction comme développement asymptotique de $\ln(n!)$.	La démonstration n'est pas exigible.

C. Séries

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence et divergence	
Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Reste d'une série convergente. Lien suite-série.	Divergence grossière. La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme. Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.	
b) Séries à termes positifs ou nuls	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Séries de Riemann.	Application à l'étude de sommes partielles.
c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes	
Une série numérique absolument convergente est convergente. Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
d) Théorème des séries alternées	
Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge.	Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.