

Suites numériques (MP2I)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Une suite peut être vue comme une famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ou comme une application $n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in \mathbb{K}$, c'est équivalent.

On peut alors noter $\begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & u_n \end{cases}$ ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou (u_n) **MAIS PAS u_n !!!**.

CAS DES SUITES RÉELLES

1 Limites

Définition 1 : Limite

- Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque

ou de manière équivalente

On note alors $u_n \rightarrow +\infty$.

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ lorsque $-u_n \rightarrow +\infty$ soit

ou de manière équivalente

On note alors $u_n \rightarrow -\infty$.

2 Limites et ordre

Propriété 1 : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ et $v \rightarrow \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, l'inégalité devient large à la limite : $\ell < \ell'$.

Propriété 2

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

- Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang $u_n > a$.
- Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang $u_n < a$.

Théorème 1 : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

- $v \rightarrow \ell$
- $w \rightarrow \ell$
- apcr $v_n \leq u_n \leq w_n$

alors $u \rightarrow \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- $v \rightarrow +\infty$
- apcr $u_n \geq v_n$

alors $u \rightarrow +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- $w \rightarrow -\infty$
- apcr $u_n \leq w_n$

alors $u \rightarrow -\infty$.



3 Opérations sur les limites

Propriété 3

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- (i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \rightarrow \lambda \ell$.
 (ii) Si $u \rightarrow 0$ et v bornée, alors $uv \rightarrow 0$.

Propriété 4 : Limite de somme et produit

Si $u \rightarrow \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \rightarrow \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

- $u + v \rightarrow \ell_1 + \ell_2$
- $uv \rightarrow \ell_1 \ell_2$

Remarque

R1 – Dans les cas douteux, il peut se passer tout et n'importe quoi.
 Par exemple, pour $0 \times (+\infty)$:

- $\frac{1}{n} \times n^2 \rightarrow +\infty$
- $\frac{\alpha}{n} \times n \rightarrow \alpha$
- $\frac{-1}{n} \times n^2 \rightarrow -\infty$
- $\left(\frac{(-1)^n}{n} \times n\right)$ n'a pas de limite.

Propriété 5 : Limite d'inverse

- Si $u_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}^*$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$ et $\frac{1}{u_n} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{si } \ell \text{ finie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Si $u_n \rightarrow 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\frac{1}{u_n} \rightarrow +\infty$.

- Si $u_n \rightarrow 0$ et à partir d'un certain rang $u_n < 0$, alors $\frac{1}{u_n} \rightarrow -\infty$.

Propriété 6 : Convergence des suites géométriques réelles

- Soit $q \in \mathbb{R}$.
- Si $q = 1$, $q^n \rightarrow 1$.
 - Si $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$.
 - Si $q > 1$, $q^n \rightarrow +\infty$.
 - Si $q \leq -1$, (q^n) n'a pas de limite. Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.

II LES SUITES MONOTONES

1 Théorème de la limite monotone

Théorème 2 : Théorème de la limite monotone

- Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).
- (i) Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$).
- (ii) Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \rightarrow +\infty$ (respectivement $u \rightarrow -\infty$).

Corollaire 1

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \lim u$ (respectivement $u_n \geq \lim u$).
 De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

2 Suites adjacentes

Définition 2 : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, u et v sont adjacentes si

- l'une est croissante,
- l'autre est décroissante,
- $v - u \rightarrow 0$.

Exemple

E1 - $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2}$ et $S'_n = S_n + \frac{1}{n}$.

E2 - Si $x \in \mathbb{R}$, les suites d'approximation décimale par défaut et par excès ($d_n(x)$) et ($D_n(x)$) sont adjacentes.

Théorème 3 : des suites adjacentes

Si u, v sont adjacentes avec u croissante, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$, les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

Remarque

R2 - On a alors pour tout n , $|u_n - \ell| \leq |v_n - u_n| = v_n - u_n$ ce qui donne des information intéressante sur la **vitesse de convergence** : plus $v - u$ converge rapidement vers 0, plus u converge rapidement vers ℓ .

Cela permet aussi de connaître un rang à partir duquel u_n est une approximation de ℓ à une précision donnée.

Exemple

E3 - **Approximations décimales** : $|d_n(x) - x| \leq$

Convergence très rapide (au moins exponentielle).

Si on veut n décimales, on calcule $d_n(x)$ (évidemment!).

E4 - $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Vu le calcul précédent, pour tout n , $\left| S_n - \frac{\pi^2}{6} \right| \leq \frac{1}{n}$.

La converge est (au moins) en $\frac{1}{n}$ donc plutôt lente.

Si on veut n décimales, on calcule... S_{10^n} !

E5 - **Dichotomie** : On construit des segments emboîtés en divisant leur taille par 2 à chaque étape : $I_0 = [a, b]$, pour tout n , $I_{n+1} \subset I_n$ avec $\ell(I_{n+1}) = \frac{\ell(I_n)}{2}$, avec $I_n = [a_n, b_n]$.

Alors $(a_n), (b_n)$ sont adjacentes, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$ et la convergence de (a_n) et (b_n)

vers ℓ est au moins en $\frac{b-a}{2^n}$ donc très rapide.



CRITÈRES SÉQUENTIELS

1 Bornes inférieure et supérieure

Définition 3

La **borne supérieure** d'une partie non vide A de \mathbb{R} est, lorsqu'il existe, le plus petit des majorants de A .

La **borne inférieure** d'une partie non vide A de \mathbb{R} est, lorsqu'il existe, le plus grand des minorants de A .

Propriété 7 : Caractérisation de la borne supérieure

Soit A partie non vide \mathbb{R} , $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \end{cases}$$

**Propriété 8 : Caractérisation séquentielle de la borne supérieure**

Soit A partie non vide \mathbb{R} , $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, a_n \rightarrow \alpha \end{cases}$$

Propriété 9 : Caractérisation de la borne inférieure

Soit A partie non vide \mathbb{R} , $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A, \beta \leq x \end{cases}$$

Propriété 10 : Caractérisation séquentielle de la borne inférieure

Soit A partie non vide \mathbb{R} , $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \geq \beta \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, a_n \rightarrow \beta \end{cases}$$

2 **Caractérisation séquentielle de la densité****Définition 4 : Partie dense dans \mathbb{R}**

Une partie A non vide de \mathbb{R} est dite **dense** dans \mathbb{R} lorsque pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$, $A \cap]x, y[\neq \emptyset$.

Remarque

R3 – La définition sera étendue plus tard dans l'année.

Propriété 11 : Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de \mathbb{R} . A est dense dans \mathbb{R} si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A .

Corollaire 2 : Cas des réels et des décimaux

- (i) Tout réel est limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.
- (ii) \mathbb{D} est dense dans \mathbb{R} .

IV **EXTENSION AUX SUITES COMPLEXES****Notation 1 : Parties réelle et imaginaire, conjugué, module d'une suite complexe**

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $\Re(z) = (\Re(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\Im(z) = (\Im(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\bar{z} = (\bar{z}_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 5 : Convergence de suite complexe

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite **convergente** vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \rightarrow 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |z_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Remarque

R4 – Pas de limite infinie dans \mathbb{C} . On peut au mieux avoir $|z_n| \rightarrow +\infty$.

Propriété 12

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$z_n \rightarrow \ell \iff \Re z_n \rightarrow \Re \ell \text{ et } \Im z_n \rightarrow \Im \ell$$

Définition 6

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq M$.

Propriété 13 : Suites géométriques complexes

Soit $q \in \mathbb{C}$.

- Si $q = 1, q^n \rightarrow 1$.
- Si $|q| < 1, q^n \rightarrow 0$.
- Si $|q| > 1, (q^n)$ n'est pas bornée et donc diverge.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1, (q^n)$ diverge en étant bornée.

Remarque

R5 – En particulier, si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, les suites $(\cos(n\theta))_n$ et $(\sin(n\theta))_n$ divergent. En effet, si l'une convergerait, à l'aide de $\cos((n+1)\theta)$ ou $\sin((n+1)\theta)$, on obtient que l'autre converge aussi et alors $(e^{in\theta})$ convergerait également.

V SUITES RÉCURRENTES

1 Cas général

Le but est d'étudier les suites récurrentes réelles d'ordre 1 générales : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Propriété 14 : Limite éventuelle, cas général

Si $u_n \rightarrow \ell \in D$ et si f est continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f).



Méthode 1 : Étude générique de suite récurrente

- On commence en général par faire un dessin, et par voir quelles propriétés vérifient directement la suite.
- Parfois, les choses se voient clairement sur la formule de récurrence : ne pas se précipiter sur la méthode ci-dessous!
- Ensuite, les premières choses à cibler sont les **intervalles stables par f** : I tel que $f(I) \subset I$.
Alors, par récurrence, si à partir d'un certain rang $u_{n_0} \in I$, la suite est bien définie et $\forall n \geq n_0, u_n \in I$.
Vu la propriété précédente, bien souvent, l'une des bornes de l'intervalle sera un point fixe de f . (Il faut donc chercher les points fixes!)
On pose en général $g(x) = f(x) - x$: les points fixes de f sont les zéros de g .
Il faut aussi s'assurer que la suite est bien définie!
- Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f .
 - ★ La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g .
 - ★ Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **monotone**.
(Si $u_{n_0} \leq u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \leq f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}$$

et si $u_{n_0} \geq u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \geq f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}$$
.)
 - ★ Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_{2n})_{n \geq \frac{n_0}{2}}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq \frac{n_0-1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ avec $f \circ f$ croissante.
Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$ (mais la réciproque est fautive en général.)



Exercice 1 : Étude de (u_n) telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 8}{6}$.

Exercice 2 : CCINP 43

2 Cas d'une fonction contractante

Définition 7 : Fonction contractante

Une fonction f est dite **contractante** sur un intervalle I si et seulement si on a $k < 1$ tel que $\forall x, x' \in I$, $|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$.

Cela se traduit graphiquement par le fait que les pentes des cordes ne sont « pas trop élevées ».



Méthode 2 : Cas d'une fonction contractante

Cela est intéressant si I est stable par f . Si c'est le cas, si $\ell \in I$ point fixe de f (on peut montrer qu'il existe et est nécessairement unique), si $u_0 \in I$ stable par f , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| = |f(u_{n-1}) - f(\ell)| \leq k|u_{n-1} - \ell| \leq \dots \leq k^n |u_0 - \ell| \rightarrow 0$$

Donc directement $u_n \rightarrow \ell$, on a même une convergence exponentielle.

On peut parfois conclure rapidement grâce à l'inégalité des accroissements finis :

Théorème 4 : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que

H1

H2

H3

Alors f est k -lipschitzienne :

$$\forall x, x' \in [a, b], |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|.$$

Remarque

R6 – On peut démontrer que si ℓ est un point fixe de f de classe \mathcal{C}^1 , alors

- si $|f'(\ell)| < 1$, le point fixe est **attractif**, en particulier si $f'(\ell) = 0$ (point **super-attractif**), la convergence est quadratique, comme pour la méthode de Newton,
- si $|f'(\ell)| > 1$, le point fixe est **répulsif**,
- si $|f'(\ell)| = 1$, c'est le cas douteux. Tout peut arriver.

Exercice 3 : $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n^2}$.

VI

RELATIONS DE COMPARAISON

1 Définition

Définition 8 : Relations de comparaison

Si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et si v_n n'est jamais nul à partir d'un certain rang, on dit que

- u est **dominée** par v et on note $u = \mathcal{O}(v)$ lorsque $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée.
- u est **négligeable** devant v et on note $u = o(v)$ ou $u_n \ll v_n$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$.
- u est **équivalente** à v et on note $u \sim v$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$, soit encore $u - v = o(v)$, c'est-à-dire $u = v + o(v)$.

Remarque

R7 – La définition se généralise au cas où $(v_n)_n$ est quelconque en écrivant $u_n = v_n \times w_n$ avec $(w_n)_n$ bornée (respectivement $\rightarrow 0, 1$).

R8 –  $u = o(v)$ et $u = \mathcal{O}(v)$ traduisent une **appartenance**.

Exemple

E6 – $n = o(n^3)$ et $n^2 = o(n^3)$ mais $n \neq n^2$!

R9 – $u = \mathcal{O}(v)$ signifie qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ et un rang à partir duquel $|u_n| \leq K|v_n|$.
 $u = o(v)$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel $|u_n| \leq \varepsilon|v_n|$.

R10 – Il n'y a pas unicité de l'équivalent d'une suite. En général, on choisit le plus simple.

R11 – Cela ne donne que des informations asymptotiques sur les suites : au voisinage de $+\infty$, donc à partir d'un certain rang.

Propriété 15 : Croissances comparées des suites usuelles

Si $\alpha > 0, \beta > 0, q > 1$,

$$\ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{q^n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{\ln^\beta n}.$$

Exemple

$\ln n \ll n \ll n \ln n \ll n^2$.

Propriété 16

$$u \sim v \iff u = v + o(v)$$

2 Propriétés

Propriété 17 : Propriétés de o et \mathcal{O}

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(i) Si $\alpha \neq 0$, $u = o(\alpha v) \implies u = o(v)$ et $u = \mathcal{O}(\alpha v) \implies u = \mathcal{O}(v)$.

(ii) $u = o(1) \iff u \rightarrow 0$ et $u = \mathcal{O}(1) \iff u$ bornée.

(iii) Si $u = o(v)$ ou $u \sim v$, alors $u = \mathcal{O}(v)$ et la réciproque est fautive.

(iv) **Transitivité**

$$u = o(v) \text{ et } v = o(w) \implies u = o(w)$$

$$u = \mathcal{O}(v) \text{ et } v = \mathcal{O}(w) \implies u = \mathcal{O}(w)$$

(v) **Combinaison linéaire**

$$u = o(w) \text{ et } v = o(w) \implies \alpha u + \beta v = o(w)$$

$$u = \mathcal{O}(w) \text{ et } v = \mathcal{O}(w) \implies \alpha u + \beta v = \mathcal{O}(w)$$

(vi) **Produit**

$$u = o(v) \text{ et } a = o(b) \implies ua = o(vb)$$

$$u = \mathcal{O}(v) \text{ et } a = \mathcal{O}(b) \implies ua = \mathcal{O}(vb)$$

Propriété 18 : Propriétés de \sim

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, v, w, b ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

(i) \sim est une relation d'équivalence.

(ii) Si $u \sim v$ et $v \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ou \mathbb{C} , alors $u \rightarrow \ell$.

(iii) $u \rightarrow \ell \neq 0 \iff u \sim \ell$.

(iv) Si $u \sim v$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.



(v) Si $u \sim v$ et $a \sim b$, alors $ua \sim vb$ et $\frac{u}{a} \sim \frac{v}{b}$.

(vi) Si $u \sim v$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé**, ($u_n > 0$ et $v_n > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$, non nuls si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$), $u^\alpha \sim v^\alpha$.

(vii) Si $u_n \sim v_n$ et φ extractrice, $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.

Remarque

R 12 – $u_n \sim v_n \not\Rightarrow u_n - v_n \rightarrow 0$

R 13 – Si α n'est pas fixe : $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim e$ donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \not\sim 1^n = 1$.

R 14 – On n'ajoute pas les équivalents.

R 15 – Si on trouve une suite équivalente à 0, on s'est trompé ! (En général, on a ajouté/soustrait des équivalents...)

Cela n'a pas de sens avec la définition du programme, et même avec la généralisation, cela voudrait dire qu'on peut écrire à partir d'un certain rang $u_n = 0 \times w_n = 0$ donc que la suite est nulle à partir d'un certain rang.

En particulier, si $u_n \rightarrow 0$, on ne peut pas donner facilement un équivalent en général.

R 16 – On ne compose pas des équivalents par la gauche avec des fonctions, même continues.

La propriété suivante n'est pas officiellement au programme mais à savoir retrouver :

- $e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff u_n - v_n \rightarrow 0$
- Si $u_n \sim v_n$ avec pour tout n , $u_n > 0$ et $v_n > 0$, à partir d'un certain rang $v_n \neq 1$ et si $v_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ avec $\ell \neq 1$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

Exercice 4 : Intégrales de Wallis : Très classique !

Détermination d'un équivalent de l'intégrale de Wallis $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$

- Relation de récurrence,
- Expression de I_{2n} , I_{2n+1}

- **Décroissance**,
- $I_n \sim I_{n-1}$,
- $nI_n I_{n-1}$ **constant**,
- **Équivalent de I_n** .

3 Équivalents usuels

Propriété 19 : Formule de Stirling

$$n! \sim$$

Exercice 5 : Équivalent de $u_n = \binom{2n}{n}$

Propriété 20 : Équivalents usuels

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé et $h_n \rightarrow 0$.

- | | |
|--|--|
| ■ $\sin h_n \sim h_n$ | ■ $(1 + h_n)^\alpha - 1 \sim \alpha h_n$ |
| ■ $\tan h_n \sim h_n$ | ■ $\text{Arctan } h_n \sim h_n$ |
| ■ $\cos h_n - 1 \sim -\frac{h_n^2}{2}$ | ■ $\text{Arcsin } h_n \sim h_n$ |
| ■ $\ln(1 + h_n) \sim h_n$ | ■ $\text{sh } h_n \sim h_n$ |
| ■ $e^{h_n} - 1 \sim h_n$ | ■ $\text{th } h_n \sim h_n$ |

Remarque

R 17 – Lorsque l'on est au voisinage de a , on se ramène en général au voisinage de 0 en posant $x = a + h$ si a est fini et $x = \frac{1}{h}$ si a est infini.

Exercice 6 : Limite de $u_n = n \left(\left(1 - \sin \frac{1}{n^2} \right)^n - 1 \right)$.

4 Exemples de développements asymptotiques

Définition 9 : Développement asymptotique

On appelle **développement asymptotique** de $(u_n)_n$ toute expression de la forme

$$u_n = v_n^{(1)} + v_n^{(2)} + \dots + v_n^{(r)} + o(v_n^{(r)})$$

où $v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(r)}$ sont des suites telles que $v_n^{(1)} \gg v_n^{(2)} \gg \dots \gg v_n^{(r)}$, c'est-à-dire telles que $\forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, v_n^{(k+1)} = o(v_n^{(k)})$.

On dit que le développement asymptotique est **à la précision** $v_n^{(r)}$.

Remarque

R 18 – On a toujours que $u_n - v_n^{(1)} - \dots - v_n^{(r)} \sim v_n^{(k+1)}$. C'est un des moyen de former un développement asymptotique : par la recherche d'équivalents successifs.

R 19 – On peut adapter la définition précédente pour des fonctions au voisinage d'un point : c'est une généralisation du développement limité.



Méthode 3 : Calcul de développement asymptotique

Chercher un développement asymptotique d'une suite est souvent délicat. On peut par exemple essayer de :

1. reconnaître un développement limité « déguisé » ;
2. chercher un équivalent $u_n \sim v_n$ qui donne $u_n = v_n + o(v_n)$, puis un équivalent de la différence $u_n - v_n \sim w_n$ qui donne $u_n = v_n + w_n + o(w_n)$ et ainsi de suite ;
3. réinjecter le développement partiel dans une expression du terme général de la suite pour obtenir le terme suivant.

Exercice 7 : Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : n \mapsto e^{\sqrt{n^2+2n+4}}$ à la précision $\frac{e^n}{n}$.

Exercice 8 : Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$ à la précision e^{-4x} . Asymptote ?

Exercice 9 : Développement asymptotique à trois termes de $x^{1+\frac{1}{x}}$ en $+\infty$. Asymptote ?

Exercice 10

On s'intéresse à u_n unique zéro de $f_n(x) = 1 + x + \frac{e^x}{n}$.

1. Vérifier que la suite (u_n) est bien définie, majorée par -1 et croissante.
2. Déterminer la limite de (u_n) .
3. Déterminer un développement asymptotique à 3 termes de (u_n) .

VII SUITES EXTRAITES, VALEURS D'ADHÉRENCE

Définition 10 : Suite extraite

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.
 φ est appelée **extractrice**.

Lemme 1

Si φ est une extractrice, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

**Propriété 21 : Cas des suites convergentes**

Si $u \rightarrow \ell$, toute suite extraite de u converge vers ℓ .

Définition 11 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans \mathbb{K}) de suite extraite de u .

Exemple

E7 – Valeurs d'adhérence de $(-1)^n$.

Corollaire 3 : Reformulation

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence : sa limite.

Remarque

R20 – Réciproque fausse.

Exemple

E8 – $u_n = n$ si n est pair et 0 sinon.

Corollaire 4 : Contraposée

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

Propriété 22 : Condition suffisante de convergence

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors u converge vers cette limite.

Théorème 5 : de Bolzano-Weierstraß dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

Toute suite réelle ou complexe bornée a au moins une valeur d'adhérence.

VIII THÉORÈME DE CESÀRO**Théorème 6 : de Cesàro**

Une application classique est la recherche d'équivalent d'une suite récurrente.

Exercice 11 : Oral CCINP

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. On pose ℓ sa limite et, pour tout

$$n \in \mathbb{N}^*, y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k.$$

Démontrer que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ .

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

3. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

4. En déduire un équivalent de u_n . La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge-t-elle ?

IX RÉCURRENCES LINÉAIRES D'ORDRE 1 ET 2

Propriété 23 : Suites arithmético-géométrique

Soit une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'on ait $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Alors, si \tilde{u} est solution particulière, on a $u = v + \tilde{u}$ où v est solution de
(H) $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = av_n$, équation homogène associée.
On cherche \tilde{u} constante en général.

Propriété 24 : récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants

On considère une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ **récurrence linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants**, c'est-à-dire telle qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle **équation caractéristique** associée (E) $r^2 = ar + b$.
On suppose $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors

- Soit (E) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans \mathbb{K} , alors on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

- Soit (E) admet une unique solution (double) r dans \mathbb{K} , alors on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A + nB)r^n.$$

- Soit (E) n'admet pas de solution dans \mathbb{K} , c'est-à-dire $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors on a $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))\rho^n$$

c'est-à-dire qu'on a $K, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = K \cos(n\theta + \varphi)\rho^n.$$