Préparation aux Oraux – Exercices Centrale 2

1 Centrale 2024

Soit p un nombre premier impair. Un entier a est un carré modulo p s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a \equiv m^2[p]$.

1. (a) Écrire une fonction PYTHON qui teste si l'entier p est premier.
   (b) On s'intéresse aux nombres premiers de la forme $p = 12a + b$ avec $a < 1000$ et $b \in \{1,3,5,7,9,11\}$.
   À l'aide de PYTHON, afficher les couples (p,b) pour lesquels 3 est carré modulo p.
   Que remarque-t-on ? On suppose ce résultat toujours vrai.
   (c) À l'aide de PYTHON, afficher les entiers $n \in [\![1,9999]\!]$ tels que $2^n - 1$ divise $3^n - 1$.
2. Soit $n \geqslant 2$ tel que $2^n - 1$ divise $3^n - 1$.
   Montrer que n est impair.
3. (a) Pour $x, y \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, on définit $x \sim y$ si et seulement si $x^2 = y^2$.
   Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Déterminer le cardinal d'une classe d'équivalence et en déduire celui de l'ensemble $\left\{x^2,\ x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*\right\}$.
   (b) Montrer que, si $a \in \mathbb{Z}$ est carré modulo p tel que $a \wedge p = 1$, alors $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$.
   (c) En admettant que l'équation $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$ admet au plus $\frac{p-1}{2}$ solutions dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, déterminer le nombre exact de solutions de cette équation dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
   (d) Montrer que, pour $a \in \mathbb{Z}$ non multiple de p, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ si a est carré modulo p et $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p]$ sinon.
4. On suppose que p divise $2^n - 1$. Montrer que 3 est un carré modulo p. [???]

2 Centrale 2024

1. Coder une fonction qui prend en argument un entier n et renvoie un permutation au hasard de $\mathfrak{S}_n$.
2. Coder un fonction qui prend en arguments deux matrices symétriques réelles A et B et renvoie la valeur du produit $\prod_{k=1}^{n}\left(a_k + b_{\sigma(k)}\right)$ où σ désigne une permutation tirée au hasard et $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ les valeurs propres de A et B respectivement.
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 3 & 16 & 5 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}$. Comparer la valeur de $\prod_{k=1}^{n}\left(a_k + b_{\sigma(k)}\right)$ avec $\det(A+B)$.
   Existe-il une permutation σ telle que $\prod_{k=1}^{n}\left(a_k + b_{\sigma(k)}\right) = \det(A+B)$?
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $\operatorname{tr}\left(M E_{i,j}\right)$
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute matrice $T \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(MT) = 0$. Que peut-on dire de M ?
6. Soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Montrer qu'il existe une permutation σ telle que
   $$\det(A+B) = \prod_{k=1}^{n}\left(a_k + b_{\sigma(k)}\right)$$
   Indication : On pourra montrer qu'il existe une base dans laquelle A et B sont simultanément diagonales.
7. On pose, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(M) = \left\{UMU^{-1}, U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right\}$. Montrer que $\mathcal{O}_n(M)$ est un compact.
   En déduire qu'il existe une matrice $B_0 \in \mathcal{O}_n(B)$ telle que $\det(A+B_0) = \sup_{C \in \mathcal{O}_n(B)} \det(A+C)$.
8. Soit $T \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(T) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
9. Soit $s \in \mathbb{R}, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $e^{sM} = I_n + sM + \mathcal{O}\left(s^2\right)$.
10. Soit $s \in \mathbb{R}, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_n + sM) = 1 + \operatorname{tr}(M)s + \mathcal{O}\left(s^2\right)$.

3 Centrale 2024

Soit $A : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + x t\right) \mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que $A(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

   Indication : On pourra faire une intégration par parties en écrivant $1 = \frac{t^2+x}{t^2+x}$.

   (b) Tracer le graphe de A sur $]0,5]$ (utiliser l'expression trouvée à la question précédente). Que se passe-t-il si l'on fait la même chose sur $[-5,5]$?

2. On s'intéresse maintenant à l'existence de A sur $\mathbb{R}_*^-$, c'est-à-dire à $A(-x)$ pour $x > 0$.

   On fixe donc $x > 0$ et l'on pose $P : t \mapsto \frac{t^3}{3} - x t$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $a_n > 0$ tel que $P(a_n) = \frac{(2n+1)\pi}{2}$.

   (b) Écrire une fonction `a(n, x)` renvoyant a_n. Vérifier avec `PYTHON` que $a_n \sim \sqrt[3]{3n\pi}$.

   (c) Écrire une fonction `u(n, x)` renvoyant $u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \cos\left(\frac{t^3}{3} - x t\right) \mathrm{d}t$. Formuler une conjecture sur (u_n).

   Tracer le graphe de $t \mapsto \cos\left(\frac{t^3}{3} - x t\right)$ pour $x = 1$. Que représente u_n pour cette fonction ?

   (d) Montrer que $a_n \sim \sqrt[3]{3n\pi}$ et trouver un équivalent de $a_{n+1} - a_n$.

   (e) Démontrer la conjecture sur la suite (u_n).

   (f) Montrer la convergence de la série $\sum u_n$ puis l'existence de $A(-x)$.

4 Centrale 2024

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Rademacher.

On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. La variable S_n modélise le gain d'un joueur jouant à pile ou face, gagnant 1 point lorsqu'il fait pile, en perdant 1 sinon.

On s'intéresse à la durée pendant laquelle le gain est positif. On pose

$$K_n = \mathrm{Card}\Big(\big\{k \in \{1, \ldots, n\},\ S_{k-1} \geqslant 0 \text{ et } S_k \geqslant 0\big\}\Big).$$

Remarque de JL : cette définition est bien étrange. Elle ne correspond pas à un temps de retour à l'origine et ne prend pas des valeurs uniquement paires comme le stipule l'énoncé...

1. Coder une fonction `K(n)` renvoyant la valeur K_n.

On remarque qu'elle ne prend que des valeurs paires, ce que l'on admet par la suite.

2. Coder une fonction `occurences(nb, n)` qui simule `nb` fois le jeu pour $2n$ lancers et renvoie une liste `L` où `L[k]` est la proportion de simulations pour lesquelles $K_{2n} = 2k$. La tester pour `nb = 2000` et `n = 200`.
3. Tracer sur un même graphique `n×L[k]` en fonction de `k/n` et la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ sur $]0,1[$.

On admet que $\mathbb{P}(K_{2n} = 2k) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$. Soient $0 < a < b < 1$.

4. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(a < \frac{K_{2n}}{2n} \leqslant b\right) = \sum_{k=\lfloor na\rfloor+1}^{\lfloor nb\rfloor} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$.
5. Prouver que $\mathbb{P}\left(a < \frac{K_{2n}}{2n} \leqslant b\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n} \sum_{k=\lfloor na\rfloor+1}^{\lfloor nb\rfloor} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}}$.
6. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{K_{2n}}{2n} \leqslant b\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.